Inspectoratul Județean Dâmbovița **SSMR Filiala Dâmbovița**

Colegiul Național ,,Ienăchiță Văcărescu'', Târgoviște

Concursul de Matematică ''CĂLIN BURDUȘEL''

Ediția a VII-a, Târgoviște, 25 mai 2018

Problema 1. Numerele naturale x,a,b îndeplinesc simultan condițiile : restul împărțirii lui x la a este $2b-5$; restul împărțirii lui x la b este $4a-8$. Determinați restul împărțirii lui x la 6.

Călin Burdușel

Problema 2. Determinați numerele prime a,b,c știind că au loc simultan condițiile:

(i) Numerele $ab+c, bc+a, ca+b$ sunt prime;

(ii) Cel puțin două din numerele $ab+c^2, bc+a^2, ca+b^2$ sunt prime.

Problema 3. Fie $ABCD$ un romb, având lungimea laturii 1. Pe laturile BC și CD considerăm punctele M și N respectiv , astfel încât $MC+CN+MN=2$ și $2\cdot m(\sphericalangle MAN)=m(\sphericalangle BAD)$. Calculați $m(\sphericalangle ABC)$.

Problema 4. Determinați numerele reale x pentru care are loc egalitatea

$$\sqrt{\frac{x-7}{1989}}+\sqrt{\frac{x-6}{1990}}+\sqrt{\frac{x-5}{1991}}=\sqrt{\frac{x-1989}{7}}+\sqrt{\frac{x-1990}{6}}+\sqrt{\frac{x-1991}{5}}$$

Călin Burdușel

Notă: Timp de lucru 2 ore. Fiecare problemă este notată cu 10 puncte, 1 p fiind din oficiu.

Concursul de Matematică ''CĂLIN BURDUȘEL''

Ediția a VII-a, Târgoviște, 25 mai 2018

Barem de corectare

Problema 1.

Oficiu..*1p*

$x = ac + (2b-5)$, cu $2b-5 < a$ *1p*

$x = bk + (4a-8)$, cu $4a-8 < b$ *1p*

$7a < 21 \Rightarrow a \in \{1,2\}$..*2p*

$4a-8 \geq 0 \Rightarrow a = 2$ *1p*

$0 \leq 2b-5 < 2 \Rightarrow b = 3$..*2p*

$x = 2c+1, x = 3k \Rightarrow x = 3x-2x = 6(c-k)+3 \Rightarrow r = 3$ *2p*

Problema 2.

Oficiu..*1p*

Cel puțin unul din numerele a,b,c este par. Presupunem că $c = 2$ *1p*

Arătăm că cel puțin unul din numerele a sau b este 3.

Dacă a și $b \in M_3 + 1$, atunci $ab + 2 \vdots 3$, $ab + 2 > 3$, contradicție...*1p*

Dacă a și $b \in M_3 + 2$, atunci $ab + 2 \vdots 3$, $ab + 2 > 3$, contradicție...*1p*

Dacă $a \in M_3 + 1$ și $b \in M_3 + 2$ (sau invers) , atunci $ab + 4$ și $b^2 + 2a$ (sau $ab + 4$ și $a^2 + 2b$) nu sunt prime, contradicție. Presupunem că $b = 3$ *1p*

Arătăm că $a=5$

Pentru $a \in M_5+1$, obținem că $3a+2$ nu este prim, contradicție..*1p*

Pentru $a \in M_5+2$, obținem că $3a+4$ și a^2+6 nu sunt prime,contradicție..............................*1p*

Pentru $a \in M_5+3$, obținem că $2a+9$ și a^2+6 nu sunt prime,contradicție..............................*1p*

Pentru $a \in M_5+4$, obținem că $a+6$ nu este prim, contradicție..*1p*

În final, $(a,b,c) \in \{(2,3,5);(2,5,3);(3,2,5);(3,5,2);(5,2,3);(5,3,2)\}$ 1p

Problema 3.

Oficiu..*1p*

Fie S simetricul punctului C față de AD, iar $P \in (SD)$, $BM = DP$ *1p*

$\Delta ABM \equiv \Delta ADP \Rightarrow AM \equiv AP, \sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle DAP$ *2p*

$\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle MAP$ *1p*

AN bisectoarea unghiului MAP *1p*

$\Delta MAN \equiv \Delta PAN \Rightarrow MN \equiv NP$ *1p*

$MC+CN+MN=2 \Rightarrow MN = BM+ND = DP+DN = NP$ *2p*

N, P, D coliniare, $ABCD$ pătrat, deci $m(\sphericalangle ABC)=90^\circ$ *1p*

Problema 4.

Oficiu..*1p*

$x \geq 1991$..*1p*

$\left(\sqrt{\frac{x-7}{1989}}-\sqrt{\frac{x-1989}{7}}\right)+\left(\sqrt{\frac{x-6}{1990}}-\sqrt{\frac{x-1990}{6}}\right)+\left(\sqrt{\frac{x-5}{1991}}-\sqrt{\frac{x-1991}{5}}\right)=0$ *2p*

$$\frac{1982(-x+1996)}{7\cdot 1989\cdot\left(\sqrt{\frac{x-7}{1989}}+\sqrt{\frac{x-1989}{7}}\right)}+\frac{1984(-x+1996)}{1990\cdot 6\left(\sqrt{\frac{x-6}{1990}}+\sqrt{\frac{x-1990}{6}}\right)}+$$

$$\frac{1986(-x+1996)}{1991\cdot 5\cdot\left(\sqrt{\frac{x-5}{1991}}+\sqrt{\frac{x-1991}{5}}\right)}=0$$ *3p*

Dacă $1991 \le x < 1996$, atunci membrul stâng al ecuației este strict pozitiv................................ *1p*

Dacă $x > 1996$, atunci membrul stâng al ecuației este strict negativ.. *1p*

$x = 1996$ *1p*