Inspectoratul Județean Dâmbovița **SSMR Filiala Dâmbovița**

Colegiul Național ,,Ienăchiță Văcărescu'', Târgoviște

Concursul de Matematică ''Sorin Săileanu''

Ediția a V-a, Târgoviște, 25 mai 2018

Subiectul 1. Calculați:

$$\max\left\{abc\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\middle|a,b,c\in\left[0,\infty\right),a+b+c=3\right\}.$$

Florin Stănescu

Subiectul 2. Fie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ o funcție care satisface următoarea condiție: pentru orice număr natural $n>1$, există un număr natural prim p , divizor al lui n , astfel încât

$$f(n)=f\left(\frac{n}{p}\right)-f(p).$$

Dacă $f(2014)+f(2015)+f(2016)=3$, calculați $f(17)$.

Subiectul 3. Într-o clasă sunt 30 de elevi. Pentru fiecare pereche de elevi, ei sunt ori prieteni ori sunt certați unul cu celălalt. Fiecare elev are 6 prieteni, și orice 3 elevi formează un grup. Un grup este *omogen* dacă toți componenții sunt prieteni între ei, sau sunt toți certați unii cu alții. Să se determine numărul total de grupuri omogene din clasă.

Subiectul 4. Pe ipotenuza BC a unui triunghi dreptunghic isoscel ABC se consideră două puncte M și $N, N\in(MC)$ astfel încât $BM^2-MN^2+NC^2=0$. Să se arate că $m(\measuredangle MAN)=45^\circ$.

Cristinel Mortici

Notă: Timp de lucru 120 minute. Se acordă câte 10 puncte pentru fiecare subiect rezolvat corect, 1 punct fiind din oficiu.

Selecție subiecte: *Prof.Florin Stănescu*

Prof.Dan Baicu

Inspectoratul Județean Dâmbovița **SSMR Filiala Dâmbovița**

Colegiul Național ,,Ienăchiță Văcărescu'', Târgoviște

Concursul de Matematică ''Sorin Săileanu''

Ediția a V-a, Târgoviște, 25 mai 2018

Barem de corectare

Subiectul 1.

Oficiu...*1p*

$abc\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)=\frac{1}{8}\cdot 2a\left(1+a^2\right)\cdot 2b\cdot\left(1+b^2\right)\cdot 2c\left(1+c^2\right)$ *2p*

Inegalitatea mediilor:

$$\frac{1}{8}\cdot 2a\left(1+a^2\right)\cdot 2b\cdot\left(1+b^2\right)\cdot 2c\left(1+c^2\right)\le\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2a+1+a^2}{2}\right)^2\left(\frac{2b+1+b^2}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{2c+1+c^2}{2}\right)^2=$$

$\frac{1}{8\cdot 64}\left[(1+a)(1+b)(1+c)\right]^4\le$ *3p*

$\frac{1}{8\cdot 64}\left(\frac{1+a+1+b+1+c}{3}\right)^{12}=8$ *2p*

Maximul mulțimii este 8 și se realizează dacă $a=b=c=1$...*2p*

Subiectul 2.

Oficiu...*1p*

Dacă p este prim, atunci $f(p)=f(1)-f(p)\Rightarrow f(p)=\frac{f(1)}{2}$ *2p*

Dacă $n=\prod_{i=1}^{r}p_i^{\alpha_i}$, p_i – prime, atunci $f(n)=f(1)-\sum_{i=1}^{r}\alpha_i f(p_i)=\left(2-\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\right)\frac{f(1)}{2}$ *3p*

$f\left(2^1\cdot 19^1\cdot 53^1\right)+f\left(5^1\cdot 31^1\cdot 13^1\right)+f\left(2^5\cdot 3^2\cdot 7\right)=3\Rightarrow-\frac{f(1)}{2}-\frac{f(1)}{2}-3f(1)=3$ *2p*

$f(1)=-\frac{3}{4}$ *1p*

$f(17)=\frac{f(1)}{2}=-\frac{3}{8}$ *1p*

Subiectul 3.

Oficiu..*1p*

Numărul total de grupuri $\binom{30}{3}=\frac{30\cdot 29\cdot 28}{6}=4060$ de grupuri..*2p*

Dacă a este numărul de grupuri *omogene,* iar b numărul celor *neomogene,* atunci $a+b=4060$ *1p*

Dacă fiecare elev ar scrie pe caietul său o listă cu toate grupurile din care face parte, și în care ceilalți doi elevi sunt ori amândoi prieteni cu el, ori amandoi certați cu el, atunci fiecare elev ar scrie $\binom{6}{2}+\binom{23}{2}=268$ de grupuri...*2p*

Toti elevi ar scrie $268\cdot 30=8040$ grupuri...*1p*

Fiecare grup *omogen* va fi menționat de 3 ori, iar fiecare grup *neomogen* o singură dată, deci $3a+b=8040$...*2p*

$a=1990$ *1p*

Subiectul 4.

Oficiu..*1p*

În triunghiul MAN, teorema cosinusului,

$$\cos(\measuredangle MAN)=\frac{AM^2+AN^2-MN^2}{2AM\cdot AN}$$ *1p*

$AM^2=AB^2+MB^2-AB\cdot MB\cdot\sqrt{2}, AN^2=AC^2+NC^2-AC\cdot NC\cdot\sqrt{2}$ *2p*

$$\cos(\measuredangle MAN)=\frac{2AB^2-AB\cdot MB\cdot\sqrt{2}-AC\cdot NC\cdot\sqrt{2}}{2AM\cdot AN}$$ *1p*

$S_{MAN}=S_{ABC}-S_{ABM}-S_{ACN}=\frac{2AB^2-AB\cdot MB\cdot\sqrt{2}-AC\cdot NC\cdot\sqrt{2}}{4}$ *2p*

Cum $S_{MAN} = \dfrac{AM \cdot AN \cdot \sin(\measuredangle MAN)}{2}$ *1p*

$\sin(\measuredangle MAN) = \dfrac{2AB^2 - AB \cdot MB \cdot \sqrt{2} - AC \cdot NC \cdot \sqrt{2}}{2AM \cdot AN}$ *1p*

$tg(\measuredangle MAN) = 1 \Rightarrow m(\measuredangle MAN) = 45^\circ$ *1p*