

Concursul de Matematică “Cezar Ivănescu”

Ediția a XIX-a, Târgoviște, 05 mai 2018

CLASA a XI-a

Subiectul 1. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Arătați că pentru orice permutare $\sigma \in S_n$, avem:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n k^2 \sigma(k)} \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

Subiectul 2. Arătați că nu există funcții derivabile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(0) = 0$ și

$$f(x) \geq |x|, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Cristinel Mortici

Subiectul 3. Un călugăr pleacă într-o dimineată la ora 8 de la o mănăstire de la poalele unui munte și ajunge la o mănăstire situată în vârful muntelui la ora 12. A doua zi, se întoarce pe același traseu, pornind la ora 8 dimineată de la mănăstirea din vârful muntelui și ajunge la mănăstirea de la poalele muntelui la ora 12.

Demonstrați că există un loc pe traseu prin care călugărul trece la aceeași ora în ambele zile (între 8 și 12).

Notă: Timp de lucru 120 minute. Se acordă câte 10 puncte pentru fiecare subiect rezolvat corect, 1 punct fiind din oficiu.

Concursul de Matematică "Cezar Ivănescu"
Ediția a XIX-a, Târgoviște, 5 mai 2018
Barem orientativ - clasa a XI-a

SUBIECTUL 1.

Notăm $S(\sigma) = \sum_{k=1}^n k^2 \sigma(k)$. Fie π o permutare care realizează maximul sumei. Atunci
 $S(\sigma) \leq S(\pi)$ pentru orice permutare σ 2p
 Fie $\sigma = \pi(i, j), i < j$. Atunci $i^2 \pi(j) + j^2 \pi(i) \leq i^2 \pi(i) + j^2 \pi(j)$ 3p
 Permutarea π nu are inversiuni deci $\pi = e$ 2p
 Finalizare 2p
 Oficiu 1p

SUBIECTUL 2.

Presupunem că f este derivabilă în origine și atunci derivatele laterale există, sunt finite și egale..... 1p
 Dacă $x < 0, \frac{f(x)}{x} \leq -1$ și $f'(0) \leq -1$ 3p
 Dacă $x > 0, \frac{f(x)}{x} \geq 1$ și $f'(0) \geq 1$ 3p
 Contradicție și finalizare 2p
 Oficiu 1p

SUBIECTUL 3. Fiecărui punct al traseului îi asociem un număr real egal cu distanța de la mânăstirea aflată la poalele muntelui la acel punct 2p

Considerăm funcțiile $f: [8, 12] \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: [8, 12] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t)$ = numărul real asociat punctului în care se află călugărul la momentul t în prima zi și $g(t)$ = numărul real asociat punctului în care se află călugărul la momentul t în a doua zi. 2p

Funcțiile f și g sunt continue 1p
 Funcția $h = f - g$ are proprietatea lui Darboux și se anulează într-un punct $t_0 \in (8, 12)$ 2p
 Finalizare 2p
 Oficiu 1p