

Concursul de Matematică “Cezar Ivănescu”

Ediția a XIX-a, Târgoviște, 05 mai 2018

CLASA a X-a

Subiectul 1. Să se rezolve în numere reale ecuațiile:

a) $\cos^2 x + \cos^2 [x] + \cos^2 \{x\} = 1$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x și $\{x\}$ este partea fracționară a lui x ;

b) $x^3 - 2 = 3\sqrt[3]{3x + 2}$.

R.M.T.

Subiectul 2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, definim funcția $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, prin

$$f(x) = (2^x + 3^x)(4^x + 5^x) - n(2^x + 3^x + 4^x + 5^x).$$

Demonstrați ca:

- a) pentru $n = 2$, funcția f obținută este crescătoare;
- b) exista un număr finit de valori naturale ale lui n pentru care funcția f obținută este crescătoare.

Cristinel Mortici

Subiectul 3. Fie a, b, c numere complexe nenule cu $|a| = |b| = |c|$. Să se arate că dacă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are o soluție de modul 1, atunci $b^2 = ac$.

R.M.T.

Notă: Timp de lucru 120 minute. Se acordă câte 10 puncte pentru fiecare subiect rezolvat corect, 1 punct fiind din oficiu.

Concursul de Matematică “Cezar Ivănescu”
Ediția a XIX-a, Târgoviște, 5 mai 2018
Barem orientativ - clasa a X-a

SUBIECTUL 1.

Oficiu.....1p

a) Scrierea ecuației sub forma echivalentă $\cos x \cdot \cos[x] \cdot \cos\{x\} = 0$3p

Analizarea fiecărui caz și determinarea mulțimii soluțiilor ecuației $\left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ 2p

b) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3-2}{3}$ este bijectivă2p

Ecuația este echivalentă cu $f(x) = f^{-1}(x)$ 1p

Soluțiile ecuației $f(x) = x$ sunt $x_1 = x_2 = -1$ și $x_3 = 2$ 1p

SUBIECTUL 2.

Oficiu.....1p

a) Funcția $f_1: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = 2^x \cdot 4^x - 2^x - 4^x = (4^x - 1)(2^x - 1) - 1$ este crescătoare (produs de funcții pozitive și crescătoare).....3p

Pentru $n = 2$ funcția se poate scrie sub forma

$f(x) = (4^x - 1)(2^x - 1) + (5^x - 1)(2^x - 1) + (4^x - 1)(3^x - 1) + (5^x - 1)(3^x - 1) - 4$
 este crescătoare (sumă de funcții crescătoare).....3p

b) Din $f(2) - f(1) = 488 - 40n > 0$ rezultă $n \leq 12$3p

SUBIECTUL 3. *Oficiu*.....1p

Fie $|x_1| = 1$. Din a doua relație Viète se obține $|x_2| = 1$2p

$\overline{x_1 + x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$3p

Din $|a| = |b|$, rezultă $a \cdot \bar{a} = b \cdot \bar{b}$, deci $\frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \frac{a}{b}$ 3p

Finalizare.....1p