

## Concursul de Matematică “Cezar Ivănescu”

Ediția a XIX-a, Târgoviște, 05 mai 2018

---

### CLASA a IX-a

**Subiectul 1.** Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  o progresie aritmetică neconstantă cu  $a_1 = 1$ , cu proprietatea că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , expresia

$$\frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

nu depinde de  $n$  (este constantă în raport cu  $n$ ). Determinați  $a_{15}$ .

**Subiectul 2.** Fie  $(x_n)_{n \geq 1}$  un șir cu proprietatea că:

$$\frac{1}{1+x_n} + \frac{1}{1+2x_{n-1}} + \dots + \frac{1}{1+nx_1} = \frac{n}{2},$$

oricare ar fi  $n \geq 1$ . Demonstrați că

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \dots + \frac{x_n}{n+1} < 1,$$

oricare ar fi  $n \geq 1$ .

**Cristinel Mortici**

**Subiectul 3.** Fie  $[AD]$  bisectoarea unghiului  $A$  a triunghiului  $ABC$ ,  $D \in (BC)$ . Dacă  $AB < AC$  și  $E$  este proiecția lui  $B$  pe  $(AD)$ . Determinați numerele reale  $x, y, z$  pentru care

$$\vec{r}_E = x\vec{r}_A + y\vec{r}_B + z\vec{r}_C.$$

Se notează  $BC = a, AC = b, AB = c$ .

*Notă: Timp de lucru 120 minute. Se acordă câte 10 puncte pentru fiecare subiect rezolvat corect, 1 punct fiind din oficiu.*

**Concursul de Matematică "Cezar Ivănescu"**  
**Ediția a XIX-a, Târgoviște, 5 mai 2018**  
**Barem orientativ - clasa a IX-a**

**SUBIECTUL 1.** Să notăm  $f(n) = \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ ;  $f(n) = \frac{2 + (3n-1)r}{2 + (n-1)r}$ ,  $n \geq 1$  .....3p

$f(1) = f(2)$  implică  $r=2$  .....3p

$a_{15} = 29$  .....3p

Oficiu .....1p

**SUBIECTUL 2.**

$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}$  .....3p

Se arată prin inducție că  $x_n = \frac{1}{n}$ , .....3p

$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \dots + \frac{x_n}{n+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$  .....3p

Oficiu .....1p

**SUBIECTUL 3.**

$BE \cap AC = \{F\}$  și  $AB=AF=c$  .....2p

$FC=b - c$  .....1p

B, E, F coliniare  $\Rightarrow$  (T. Menelau)  $\frac{BC}{BD} \cdot \frac{ED}{EA} \cdot \frac{FA}{FC} = 1$  ..... 1p

$\frac{DC}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{b+c}{b}$  .....1p

Fie  $k = \frac{EA}{ED} = \frac{b+c}{b-c}$  .....1p

$\vec{r}_D = \frac{b}{b+c} \vec{r}_B + \frac{c}{b+c} \vec{r}_C$  .....1p

$\vec{r}_E = \frac{1}{1+k} \vec{r}_A + \frac{k}{1+k} \vec{r}_D = \frac{1}{1+k} \vec{r}_A + \frac{k}{1+k} \left( \frac{b}{b+c} \vec{r}_B + \frac{c}{b+c} \vec{r}_C \right)$  .....1p

$x = \frac{b-c}{2b}; y = \frac{1}{2}; z = \frac{c}{2b}$  .....1p

Oficiu .....1p