

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz (CBS)

cu aplicații în geometrie

Prof. ALDICA Maria Gizela

În acest articol se vor prezenta câteva probleme în care se utilizează inegalitatea CBS.

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz

Pentru orice numere reale a_k, b_k , unde $k = \overline{1, n}$ are loc

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \text{ cu egalitate dacă}$$

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ (cu convenția că dacă într-o fracție un numitor este nul, atunci și numărătorul corespunzător este zero).

1. Fie ABCD un patrulater ortodiagonal. Arătați că ABCD este pătrat dacă și numai dacă

$$AC + BD = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot P_{ABCD}.$$

Soluție: Dacă ABCD este pătrat de latură $l \Rightarrow AC = BD = l\sqrt{2}$ și $P_{ABCD} = 4l$, rezultă

imediat $AC + BD = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot P_{ABCD}$. Reciproc presupunem

$$AC + BD = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot P_{ABCD}. \text{ Notăm } AC \cap BD = \{O\}, AO = x, BO = y, CO = z, DO = t. \text{ Cum } AC$$

$\perp BD \Rightarrow AB = \sqrt{x^2 + y^2}, BC = \sqrt{y^2 + z^2}, CD = \sqrt{z^2 + t^2}, DA = \sqrt{t^2 + x^2}$ (cu teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice AOB, BOC, COD, DOA).

Dar $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ cu egalitate $\Leftrightarrow a = b$. Obținem $a + b \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$.

În ΔAOB : $x + y \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow AO + BO \leq \sqrt{2} \cdot AB$

$$\Delta \text{ BOC: } y + z \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{y^2 + z^2} \Rightarrow BO + CO \leq \sqrt{2} \cdot BC$$

$$\Delta \text{ COD: } z + t \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{z^2 + t^2} \Rightarrow CO + DO \leq \sqrt{2} \cdot CD$$

$$\Delta \text{ AOD: } t + x \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{t^2 + x^2} \Rightarrow DO + AO \leq \sqrt{2} \cdot AD$$

Însumând inegalitățile precedente găsim $AC + BD \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot P_{ABCD}$, cu egalitate dacă și numai dacă $x = y, y = z, z = t, t = x$, respectiv $AO = BO, BO = CO, CO = DO, DO = AO$, adică $AO = BO = CO = DO$, prin urmare ABCD pătrat.

2. Într-un triunghi ABC are loc inegalitatea:

$$\sqrt{a(p-a)} + \sqrt{b(p-b)} + \sqrt{c(p-c)} \leq p\sqrt{2}, \text{ unde notațiile sunt cele uzuale și } p = \frac{a+b+c}{2}$$

.

Soluție: Inegalitatea CBS pentru $n=3$ devine:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \text{ Luăm } a_1 = \sqrt{a}, a_2 = \sqrt{b}, a_3 = \sqrt{c} \text{ respectiv } b_1 = \sqrt{p-a}, b_2 = \sqrt{p-b}, b_3 = \sqrt{p-c}.$$

Are loc egalitatea pentru $\frac{a}{p-a} = \frac{b}{p-b} = \frac{c}{p-c} = \frac{2p}{p} = 2$; egalând fiecare raport cu 2 deducem că $a=b=c$ deci triunghi echilateral.

3. Fie P un punct situat în interiorul tetraedrului ABCD și A_1, B_1, C_1, D_1 proiecțiile ortogonale ale punctului P pe planele (BCD), (ACD), (ABD), (ABC).

Arătați că $\frac{PA_1}{A_{\Delta BCD}} + \frac{PB_1}{A_{\Delta ACD}} + \frac{PC_1}{A_{\Delta ABD}} + \frac{PD_1}{A_{\Delta ABC}} \geq \frac{1}{3V} \cdot (PA_1 + PB_1 + PC_1 + PD_1)^2$, unde cu V am notat volumul tetraedrului ABCD.

Soluție:
$$\frac{PA_1 \cdot A_{\Delta BCD}}{3} + \frac{PB_1 \cdot A_{\Delta ACD}}{3} + \frac{PC_1 \cdot A_{\Delta ABD}}{3} + \frac{PD_1 \cdot A_{\Delta ABC}}{3} = V.$$

$$\text{Din } \left(\sqrt{a_1 b_1} \cdot \sqrt{\frac{a_1}{b_1}} + \sqrt{a_2 b_2} \cdot \sqrt{\frac{a_2}{b_2}} + \sqrt{a_3 b_3} \cdot \sqrt{\frac{a_3}{b_3}} + \sqrt{a_4 b_4} \cdot \sqrt{\frac{a_4}{b_4}} \right)^2 \leq$$

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4) \cdot \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} \right), \text{ obținem}$$

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 \leq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4) \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} \right)$$

(am aplicat inegalitatea Cauchy-Buniakovski Schwartz).

Fie $a_1 = PA_1$, $b_1 = A_{\Delta BCD}$ **și analoagele** \Rightarrow

$$(PA_1 + PB_1 + PC_1 + PD_1)^2 \leq 3V \cdot \left(\frac{PA_1}{A_{\Delta BCD}} + \frac{PB_1}{A_{\Delta ACD}} + \frac{PC_1}{A_{\Delta ABD}} + \frac{PD_1}{A_{\Delta ABC}} \right).$$

Observație: Pentru $a_1 = A_{\Delta BCD}$, $b_1 = PA_1$ **obținem**

$$3V \cdot \left(\frac{A_{\Delta BCD}}{PA_1} + \frac{A_{\Delta ACD}}{PB_1} + \frac{A_{\Delta ABD}}{PC_1} + \frac{A_{\Delta ABC}}{PD_1} \right) \geq S^2, \text{ S aria totală.}$$

Cum $r = \frac{3V}{S}$ (**r raza sferei înscrisă în tetraedru**) $\Rightarrow \sum \frac{A_{\Delta BCD}}{PA_1} \geq \frac{S}{r}$, **inegalitate**

cunoscută (T. Andreescu, I.V. Maftei).

4. OABC este un tetraedru pentru care $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ **cu muchiile** OA, OB, OC **având lungimile** a, b, c **iar** OH **este înălțimea tetraedrului,** $H \in (ABC)$. **Fie** M **un punct situat la mijlocul lui** OH **și** d_1, d_2, d_3 **distanțele de la** M **la fețele laterale** $(OAB), (OBC), (OAC)$.

Arătați că:

a) $d_1ab + d_2bc + d_3ac = \frac{abc}{2};$

b) $\frac{d_1d_2d_3}{abc} \leq \left(\frac{1}{6} \right)^3;$

c) $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \geq \frac{OH^2}{4}.$

Soluție:

a) Scriem $V_{OABC} = V_{MOAB} + V_{MOBC} + V_{MOAC} + V_{MABC}.$

b) Cu inegalitatea mediilor $\Rightarrow d_1ab + d_2bc + d_3ac \geq 3\sqrt[3]{d_1d_2d_3(abc)^2} \Rightarrow$

$$\left(\frac{abc}{2}\right)^3 \geq 27d_1d_2d_3(abc)^2 \Rightarrow \frac{d_1d_2d_3}{abc} \leq \frac{1}{216}.$$

c) Cu inegalitatea Cauchy-Buniakovski Schwartz \Rightarrow

$$(d_1ab + d_2bc + d_3ac)^2 \leq (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2).$$

Cum $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, obținem cerința problemei.

5. Fie d_1, d_2, d_3 diagonalele fețelor unui paralelipiped dreptunghic, iar d diagonala paralelipipedului. Atunci are loc $d_1\sqrt{2} + d_2\sqrt{3} + d_3\sqrt{5} < 2d\sqrt{5}$.

Soluție: $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$, $d_2 = \sqrt{b^2 + c^2}$, $d_3 = \sqrt{a^2 + c^2}$, $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz \Rightarrow

$$\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}\right)^2 \leq$$

$$\leq \left[\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2\right] \cdot \left[(a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (a^2 + c^2)\right], \text{ ceea ce conduce la}$$

$$d_1\sqrt{2} + d_2\sqrt{3} + d_3\sqrt{5} \leq 2d\sqrt{5}. \text{ Există egalitate pentru } \frac{d_1}{\sqrt{2}} = \frac{d_2}{\sqrt{3}} = \frac{d_3}{\sqrt{5}} \text{ adică}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{b^2 + c^2}{3} = \frac{a^2 + c^2}{5} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{5} \text{ (din proprietatea șirului de rapoarte egale).}$$

Ultima egalitate conduce la $b = 0$, absurd! Prin urmare inegalitatea este strictă.

6. ABCDA'B'C'D' este un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c și d diagonala sa.

a) Arătați că:

$$\frac{1}{d^2}(A_{ABC'D'} + A_{BCD'A'} + A_{ACC'A'}) \leq \sqrt{2} \text{ cu egalitate dacă și numai dacă}$$

ABCD A'B'C'D' este cub.

b) Dacă d_1, d_2, d_3 diagonalele fețelor satisfac egalitatea $d_1d_2 + d_2d_3 + d_1d_3 = 2d^2$

atunci ABCDA'B'C'D' este cub.

Soluție: a) Inegalitatea este echivalentă cu $a\sqrt{b^2+c^2} + c\sqrt{a^2+b^2} + b\sqrt{a^2+c^2} \leq d^2\sqrt{2}$ (*)

Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz \Rightarrow

$$\left(a\sqrt{b^2+c^2} + c\sqrt{a^2+b^2} + b\sqrt{a^2+c^2}\right)^2 \leq (a^2+b^2+c^2) \cdot 2(a^2+b^2+c^2) \text{ și cum}$$
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow (*) .$$

Egalitatea are loc pentru $\frac{a^2}{b^2+c^2} = \frac{b^2}{a^2+c^2} = \frac{c^2}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}$ și egalând fiecare raport

cu $\frac{1}{2} \Rightarrow a = b = c$;

b) $d_1 = \sqrt{a^2+b^2}$, $d_2 = \sqrt{b^2+c^2}$, $d_3 = \sqrt{a^2+c^2} \Rightarrow$

$$(d_1d_2 + d_2d_3 + d_3d_1)^2 \leq \underbrace{(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)}_{2d^2} (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) \Rightarrow$$

$$d_1d_2 + d_2d_3 + d_3d_1 \leq 2d^2 \text{ cu egalitate pentru } \frac{d_1}{d_2} = \frac{d_2}{d_3} = \frac{d_3}{d_1} = 1, \text{ ceea ce conduce la}$$

$$d_1 = d_2 = d_3, \text{ adică cub.}$$

Bibliografie:

Pascale Maria Gizela, *Matematica pentru concurs, clasele V-VIII*, Editura Bibliotheca, Târgoviște, 2007.

Gizela Pascale (Aldica), Călin Burdușel - REVISTA DE MATEMATICĂ α, β, γ , Nr.1/2009