



**CONCURSUL NAȚIONAL  
DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"  
ETAPA JUDEȚEANĂ – 11 martie 2023  
Secțiunea H1**



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

Filiera tehnologică – toate profilurile

Clasa a XI –a

**Subiectul 1.**

În mulțimea  $M_2(\mathbb{R})$  se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2023^n & 7 \end{pmatrix}$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ .

- Demonstrați că **nu** există  $a, b, c \in \mathbb{R}$  și  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât  $aA + bB + cI_2 = C$ .
- Determinați  $A^{2023}$ .
- Demonstrați că  $B^n = I_2 + (2^n - 1)A$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Subiectul 2.**

Se consideră mulțimea de matrice  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ .

- Arătați că dacă  $A, B \in G$ , atunci  $A + B \in G$  și  $A \cdot B \in G$ .
- Demonstrați că orice matrice nenulă din  $G$  este inversabilă.
- Demonstrați că dacă  $A, B \in G$  și  $A \cdot B = O_2$ , atunci  $A = O_2$  sau  $B = O_2$ .

**Subiectul 3.**

Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2^x \cdot x, & x < 1 \\ x^2 + 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$ .

- Determinați ecuația asimptotei către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- Demonstrați că ecuația  $f(x) = 0$  admite cel puțin o soluție în intervalul  $[-1, 2]$ .
- Determinați  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât tangenta la graficul funcției  $f$  în punctul de abscisă  $x_0 = 0$  să fie paralelă cu dreapta de ecuație  $y = ax + 2$ .

**Subiectul 4.**

La o clasă a XI-a profesorul scrie pe tablă funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x + \cos x + x$ . Pentru orice  $n \geq 1$ , notează cu  $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , iar  $f_1(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Propune elevilor săi următorul joc: fiecare dintre ei va ieși la tablă în ordine alfabetică și va scrie rezultatul pentru  $f_n(0)$ , fiecare elev luându-l pe  $n$  drept numărul său de la catalog.

- Ce numere vor fi scrise pe tablă?
- Dacă în clasă sunt 28 de elevi, aflați care sunt ultimele două numere scrise pe tablă și precizați de câte ori este scris fiecare număr.