CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ PENTRU CLASELE IV – VIII
„OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA”
Etapa județeană – 12.03.2022

Clasa a VI-a

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Problema 1 **(7 puncte)**

a) Produsul a două numere naturale este egal cu 108. Determinați suma celor două numere, știind că 6 este cel mai mare divizor comun al lor.

b) Dacă elevii unei școli se așază în bancă câte 4, câte 5, câte 6 sau câte 7, rămân de fiecare dată câte 3 elevi în picioare. Câți elevi sunt în școală, dacă numărul lor este mai mic decât 500?

Soluție

a) $(a,b)=6 \Rightarrow a=6x, b=6y, (x,y)=1$........1p

$a \cdot b=108 \Rightarrow x \cdot y=3 \Rightarrow x=1, y=3$ sau $x=3, y=1$........1p

$a=6, b=18$ sau $a=18, b=6 \Rightarrow a+b=24$........1p

b) $x=4a+3,\ x=5b+3,\ x=6c+3,\ x=7d+3$........1p

$x-3=4a,\ x-3=5b,\ x-3=6c,\ x-3=7d$........1p

$(x-3) \vdots [4,5,6,7] \Rightarrow (x-3) \vdots 420$........1p

$x=423$........1p

Problema 2 **(7 puncte)**

Numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sunt direct proporționale cu numerele $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Dacă $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=5760$ și $a_{n-1}-a_n=40$, aflați n, a_1, a_n.

Soluție

$\frac{a_1}{\frac{1}{6}}=\frac{a_2}{\frac{1}{12}}=\cdots=\frac{a_n}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}=k$........1p

$a_1=\frac{k}{6}, a_2=\frac{k}{12}, \ldots\ldots, a_n=\frac{k}{(n+1)(n+2)}$........1p

$k \cdot \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=5760 \Rightarrow k \cdot \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=5760$........2p

$kn=11520(n+2)$........1p

$k \cdot \left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=40 \Rightarrow k=20n(n+1)(n+2) \Rightarrow n^2(n+1)=576$........1p

$n=1, k=14400, a_1=2400, a_8=160$........1p

Inspectoratul Școlar Județean Dâmbovița
Calea Domnească, nr. 127, Târgoviște, Dâmbovița
Telefon: 0245/211891; Fax: 0245/613723;
E-mail: isjdb@isj-db.ro; Web: www.isj-db.ro

Problema 3 **(7 puncte)**

În triunghiul ascuțitunghic *ABC* punctele *M* și *P* sunt mijloacele laturilor *AB* și respectiv *AC*.
Știind că perpendiculara în *M* pe *AB* intersectează perpendiculara în *P* pe *AC*, în *T*, demonstrați că punctul *T* este egal depărtat față de punctele *B* și *C*.

Soluție

M este mijlocul laturii BC și $TM \perp AB \Rightarrow TM$ este mediatoarea laturii AB 1p

$TA \equiv TB$ (1)..2p

P este mijlocul laturii AC și $TP \perp AC \Rightarrow TP$ este mediatoarea laturii AC 1p

$TA \equiv TC$ (2)..2p

Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow$ $TB \equiv TC \Rightarrow T$ este egal depărtat față de punctele *B* și *C*..............................1p

Problema 4 **(7 puncte)**

În jurul punctului *O* se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle EOA$ astfel încât $\sphericalangle BOC = 2 \cdot \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle COD$ este dublul unghiului $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle EOA$ este triplul unghiului $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle DOE = 5 \cdot \sphericalangle AOB$.

a) Arătați că punctele E, O și C sunt coliniare.
b) Dacă semidreptele OM și ON sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ respectiv $\sphericalangle COD$, arătați că $OM \perp ON$.

Soluție

a) $\sphericalangle AOB = x, \sphericalangle BOC = 2x, \sphericalangle COD = 4x, \sphericalangle DOE = 5x$, $\sphericalangle EOA = 6x$ 1p

$x + 2x + 4x + 5x + 6x = 360^0 \Rightarrow x = 20^0$ 1p

$\sphericalangle AOB = 20^0, \sphericalangle BOC = 40^0, \sphericalangle COD = 80^0, \sphericalangle DOE = 100^0$, $\sphericalangle EOA = 120^0$ 1p

$\sphericalangle EOC = 180^0 \Rightarrow$ punctele *E*, *O*, *C* sunt coliniare 1p

b) $\sphericalangle MOB = 10^0$...1p

$\sphericalangle NOC = 40^0$...1p

$\sphericalangle MON = \sphericalangle MOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle NOC = 90^0 \Rightarrow OM \perp ON$. 1p

Inspectoratul Școlar Județean Dâmbovița
Calea Domnească, nr. 127, Târgoviște, Dâmbovița
Telefon: 0245/211891; Fax: 0245/613723;
E-mail: isjdb@isj-db.ro; Web: www.isj-db.ro