CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ PENTRU CLASELE IV – VIII
„OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA"
Etapa județeană – 12.03.2022

Clasa a VII-a

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Problema 1 **(7 puncte)**

a) Arătați că numărul $n=\sqrt{\frac{102}{99}\cdot\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{50\cdot51}\right)-\left(\frac{1}{51\cdot52}+\frac{1}{52\cdot53}+\frac{1}{53\cdot54}+\cdots+\frac{1}{101\cdot102}\right)\right]}$ este natural;

b) Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b dacă:

$$a=\frac{12\sqrt2}{7}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{12}}+\frac{2}{\sqrt{75}}+\frac{3}{2\sqrt{48}}-\frac{21}{5\sqrt{27}}\right) \text{ și } b=\frac{37}{28}:\left(\frac{5}{\sqrt{24}}+\frac{19}{7\sqrt6}-\frac{5}{\sqrt{150}}-\frac{2}{\sqrt{384}}\right).$$

Barem:

a) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{50\cdot51}=\frac11-\frac12+\frac12-\frac13+\frac13-\frac14+\cdots+\frac{1}{50}-\frac{1}{51}=\frac11-\frac{1}{51}=\frac{50}{51}$ **1p**

$\frac{1}{51\cdot52}+\frac{1}{52\cdot53}+\frac{1}{53\cdot54}+\cdots+\frac{1}{101\cdot102}=\frac{1}{51}-\frac{1}{52}+\frac{1}{52}-\frac{1}{53}+\frac{1}{53}-\frac{1}{54}+\cdots+\frac{1}{101}-\frac{1}{102}=\frac{1}{51}-\frac{1}{102}=\frac{1}{102}$ **1p**

$\Rightarrow n=\sqrt{\frac{102}{99}\left(\frac{50}{51}-\frac{1}{102}\right)}=\sqrt{\frac{102}{99}\cdot\frac{99}{102}}=\sqrt1=1\in\mathbb{N}$ **1p**

b) $a=\frac{12\sqrt2}{7}\cdot\left(\frac{3}{2\sqrt3}+\frac{2}{5\sqrt3}+\frac{3}{8\sqrt3}-\frac{21}{15\sqrt3}\right)$ **1p**

$a=\frac{12\sqrt2}{7}\cdot\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac{2\sqrt3}{15}+\frac{\sqrt3}{8}-\frac{7\sqrt3}{15}\right)$

$a=\frac{12\sqrt2}{7}\cdot\frac{60\sqrt3+16\sqrt3+15\sqrt3-56\sqrt3}{120}$ **1p**

$a=\frac{12\sqrt2}{7}\cdot\frac{35\sqrt3}{120}=\frac{\sqrt6}{2}$

$b=\frac{37}{28}:\left(\frac{5}{2\sqrt6}+\frac{19}{7\sqrt6}-\frac{5}{5\sqrt6}-\frac{2}{8\sqrt6}\right)$

$b=\frac{37}{28}:\left(\frac{5\sqrt6}{12}+\frac{19\sqrt6}{42}-\frac{\sqrt6}{6}-\frac{\sqrt6}{24}\right)$ **1p**

$b=\frac{37}{28}:\frac{70\sqrt6+76\sqrt6-28\sqrt6-7\sqrt6}{168}$

$b=\frac{37}{28}\cdot\frac{168}{111\sqrt6}=\frac{2}{\sqrt6}=\frac{2\sqrt6}{6}=\frac{\sqrt6}{3}$

$m_a=\frac{a+b}{2}\Rightarrow m_a=\frac{\frac{\sqrt6}{2}+\frac{\sqrt6}{3}}{2}=\frac{5\sqrt6}{12}$

$m_g=\sqrt{a\cdot b}\Rightarrow m_g=\sqrt{\frac{\sqrt6}{2}\cdot\frac{\sqrt6}{3}}=\sqrt{\frac66}=1$ **1p**

Inspectoratul Școlar Județean Dâmbovița
Calea Domnească, nr. 127, Târgoviște, Dâmbovița
Telefon: 0245/211891; Fax: 0245/613723;
E-mail: isjdb@isj-db.ro; Web: www.isj-db.ro

Problema 2 **(7 puncte)**

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\frac{x}{2+4+6+\cdots+4042}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2021}\right)$$

Barem:

$2+4+6+\cdots+4042=2(1+2+3+\cdots+2021)=2\cdot\frac{2021\cdot2022}{2}=2021\cdot2022$ **2p**

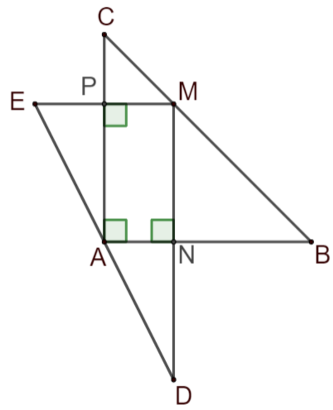
$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2021}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2020}{2021}=\frac{1}{2021}$ **3p**

Ecuația devine: $\frac{x}{2021\cdot2022}=\frac{1}{2021}\Rightarrow x=2022$ **2p**

Problema 3 **(7 puncte)**

Se consideră triunghiul ΔABC dreptunghic isoscel și M un punct oarecare pe ipotenuza BC. Dacă $MN\perp AB, N\in AB, MP\perp AC, P\in AC$, punctul D este simetricul punctului M față de dreapta AB și punctul E este simetricul punctului M față de dreapta AC demonstrați că:

a) suma $MN+MP$ este constantă;
b) punctele E, A, D sunt coliniare



Barem:

a)

$MPAN$ dreptunghi $\Rightarrow MP\equiv AN$ **1p**

ΔBNM dreptunghic isoscel $\Rightarrow BN\equiv MN$ **1p**

$\Rightarrow MN+MP=BN+AN=AB$ constant **1p**

b) $\Delta APE\equiv\Delta DNA\,(C.C.)\Rightarrow$ **1p**

$\Rightarrow\sphericalangle PAE\equiv\sphericalangle NDA$ și $\sphericalangle PEA\equiv\sphericalangle NAD$ **1p**

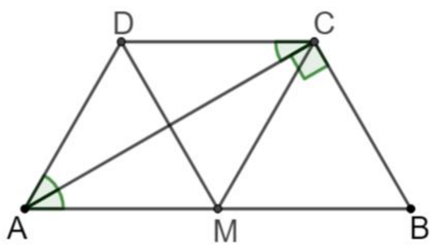
Dar, $\sphericalangle PAE+\sphericalangle PEA=90^\circ\Rightarrow\sphericalangle PAE+\sphericalangle NAD=90^\circ$ **1p**

$\Rightarrow\sphericalangle PAE+\sphericalangle NAD+\sphericalangle BAC=90^\circ+90^\circ=180^\circ\Rightarrow E,A,D$ coliniare **1p**

Problema 4 **(7 puncte)**

Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB\parallel CD, AB>CD$ astfel încât $AD\equiv CD\equiv BC$ și $AC\perp BC$, iar lungimea bazei mari $AB=24\,cm$.

a) Aflați măsurile unghiurilor trapezului $ABCD$.
b) Calculați perimetrul trapezului,
c) Dacă M este mijlocul laturii AB, arătați că $DM\perp AC$.



Barem:

a) $AD\equiv DC\Rightarrow\sphericalangle DAC\equiv\sphericalangle DCA$

$\sphericalangle DCA\equiv\sphericalangle CAB$ (alterne interne) $\Rightarrow$ **1p**

$\Rightarrow\sphericalangle DAC=\sphericalangle DCA=\sphericalangle CAB=x\Rightarrow\sphericalangle ABC=2x$

Inspectoratul Școlar Județean Dâmbovița
Calea Domnească, nr. 127, Târgoviște, Dâmbovița
Telefon: 0245/211891; Fax: 0245/613723;
E-mail: isjdb@isj-db.ro; Web: www.isj-db.ro

În triunghiul ΔABC obținem $x + 2x = 90° \Rightarrow x = 30°$ **1p**

$\Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle B = 60°$ și $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 180° - 60° = 120°$

b) contruim $DD' \perp AB, CC' \perp AB$ cu $D', C' \in AB \Rightarrow D'C' = DC = AD = BC = a$ **1p**

$\sphericalangle DAD' = 60° \Rightarrow \sphericalangle ADD' = 30° \Rightarrow AD' = C'B = \frac{a}{2}$

Din $AB = 24\ cm \Rightarrow \frac{a}{2} + a + \frac{a}{2} = 24 \Rightarrow a = 12\ cm$ **1p**

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 24 + 12 + 12 + 12 = 60\ cm$ **1p**

c) $AB \parallel CD, M \in AB \Rightarrow AM \parallel CD$

M mijlocul lui $AB \Rightarrow AM = \frac{AB}{2} = 12 = CD$ **1p**

$\Rightarrow AMCD$ paralelogram

Dar, $AM = AD = 12\ cm \Rightarrow AMCD$ romb $\Rightarrow DM \perp AC$ **1p**