CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ PENTRU CLASELE IV – VIII
„OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA"
Etapa județeană – 12.03.2022

Clasa a VIII-a

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Problema 1 **(7 puncte)**

a) Comparați numerele a și b dacă:

$a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}$ și $b = (\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}) + 6 - 2\sqrt{10}$

b) Se consideră numerele $x = \left(\frac{12}{\sqrt{6}} + \frac{6}{\sqrt{12}} - \sqrt{24} + 2\right)^2$ și $y = \left[\frac{4}{\sqrt{8}} + \frac{6}{\sqrt{3}} - (\sqrt{3} + \sqrt{2}) - 2\right]^2$.

Arătați că $x - \frac{1}{x} = \frac{1}{y} - y$

Barem:

a) $a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}$

$a = \frac{2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+1}{2^5}$ **1p**

$a = \frac{2^6-1}{2^5} = 2 - \frac{1}{2^5}$

$b = 3 + \sqrt{15} - \sqrt{6} - \sqrt{15} - 5 + \sqrt{10} + \sqrt{6} + \sqrt{10} - 2 + 6 - 2\sqrt{10}$ **1p**

$b = 2$ **1p**

$\Rightarrow a = 2 - \frac{1}{2^5} < 2 = b$

b) $x = (2\sqrt{6} + \sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 2)^2$ **1p**

$x = (\sqrt{3} + 2)^2 = 7 + 4\sqrt{3}$

$y = [\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2]^2$

$y = (\sqrt{3} - 2)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$ **1p**

$x + y = 7 + 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3} = 14$

$x - \frac{1}{x} = \frac{1}{y} - y \Leftrightarrow x + y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ **1p**

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{7-4\sqrt{3}} = \frac{7-4\sqrt{3}+7+4\sqrt{3}}{49-48} = 14$ **1p**

Inspectoratul Școlar Județean Dâmbovița
Calea Domnească, nr. 127, Târgoviște, Dâmbovița
Telefon: 0245/211891; Fax: 0245/613723;
E-mail: isjdb@isj-db.ro; Web: www.isj-db.ro

Problema 2 **(7 puncte)**

Se consideră expresia $E(x) = 5(x-2)^2 - 3(x+3)(x-1) + 11(2x-3) + 13$, unde $x \in \mathbb{R}$. Determinați valoarea minimă a lui $E(x)$ și valoarea lui x pentru care se realizează acest minim.

Barem:

$E(x) = 5(x^2 - 4x + 4) - 3(x^2 - x + 3x - 3) + 22x - 33 + 13$	**2p**
$E(x) = 5x^2 - 20x + 20 - 3x^2 + 3x - 9x + 9 + 22x - 20$	**1p**
$E(x) = 2x^2 - 4x + 9$	**1p**
$E(x) = 2(x^2 - 2x + 1) + 7$	**1p**
$E(x) = 2(x-1)^2 + 7$	**1p**
$(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow minE(x) = 7$ și se obține pentru $x = 1$	**1p**

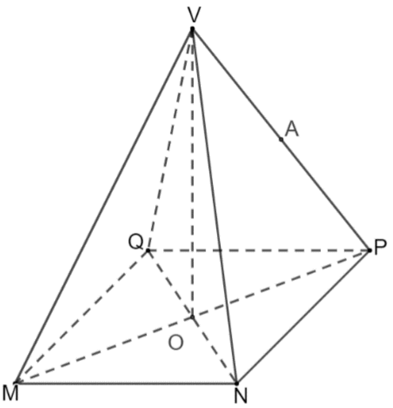
Problema 3 **(7 puncte)**

În figura de mai jos este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VMNPQ$, cu $VM = MN = 10\sqrt{2}cm$, iar punctul A este mijlocul muchiei VP.

a) Arătați că muchia VM este paralelă cu planul (AQN);

b) Arătați că muchia VP este perpendiculară pe planul (AQN)

c) Calculați aria triunghiului AQN.



a)

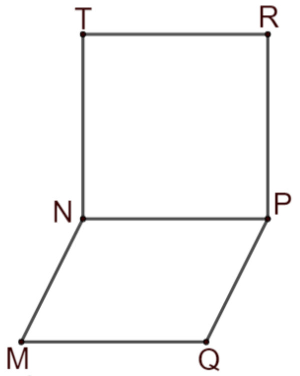
$$\left.\begin{array}{r} OA \text{ linie mijlocie în } \Delta VMP \Rightarrow VM \parallel OA \\ OA \subset (AQN) \\ VM \not\subset (AQN) \end{array}\right\} \Rightarrow VA \parallel (AQN)$$ **1p**

b) ΔVNP echilateral, NA mediană $\Rightarrow NA$ înălțime $\Rightarrow VM \perp NA$	**1p**
ΔVPQ echilateral, QA mediană $\Rightarrow QA$ înălțime $\Rightarrow VM \perp QA$	**1p**
$NA \cap QA = \{A\}$	**1p**
$NA, QA \subset (AQN) \quad \Rightarrow \quad VM \perp (AQN)$	
c) $\Delta ANP \equiv \Delta AQP\ (L.U.L.) \Rightarrow AN \equiv AQ$	**1p**
$\Rightarrow AO \perp NQ \Rightarrow A_{\Delta AQN} = \frac{NQ \cdot AO}{2}$	
$QN = 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 20\ cm$	**1p**
$\Delta VOP\ (\sphericalangle O = 90°)\ OA = \frac{VP}{2} = 5\sqrt{2}$ cm	**1p**
$\Rightarrow A_{\Delta AQN} = \frac{20 \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}\ cm^2$	

Problema 4 **(7 puncte)**

Pătratele $MNPQ$ şi $NPRT$, au muchia comună NP și sunt situate în plane perpendiculare ca în figura de mai jos, iar $MN = 12cm$.

a) Calculaţi distanţa de la punctul T la mijlocul segmentului RM.
b) Calculaţi măsura unghiului dintre dreptele NQ şi TP.
c) Calculaţi distanța de la punctul P la planul NRQ



Barem:

a) $MQ = 12\ cm \Rightarrow MP = 12\sqrt{2}$ cm **1p**

din T.P. în ΔMPR ($\sphericalangle N = 90°$) obținem $MR = 12\sqrt{3}\ cm$ **1p**

$TR \perp TN, TR \perp MN, TN \cap MN = \{N\}, TN, MN \subset (TMN) \Rightarrow TR \perp (MNT)$

$TM \subset (MNT) \Rightarrow TR \perp TM$ **1p**

Fie A mijlocul segmentului $RM \Rightarrow TA$ mediană $\Rightarrow TA = \frac{RM}{2} = 6\sqrt{3}$ cm.

b) considerăm pătratul $MQBC$ de aceeași parte cu pătratul $NPRT$,
astfel încât planele $(MQB) \perp (MNQ)$ **1p**

$CQ \parallel TP \Rightarrow \sphericalangle(NQ, TP) = \sphericalangle(NQ, CQ) = \sphericalangle(CQN)$

$CQ = CN = NQ = 12\sqrt{2}\ cm \Rightarrow \Delta CQN$ echilateral $\Rightarrow = \sphericalangle(CQN) = 60°$ **1p**

c) $NR = NQ = RQ = 12\sqrt{2}\ cm \Rightarrow \Delta NRQ$ echilateral

$PR = PN = PQ = 12\ cm \Rightarrow PNRQ$ piramidă triunghiulară regulată de vârf P și bază NRQ

$\Rightarrow d(P, (NRQ)) =$ înălțimea piramidei **1p**

Raza cercului circumscris ΔNRQ este $R = \frac{12\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{6}\ cm$

Din T.P. se obține că $d(R, (NRQ))$ este: $d^2 = 12^2 - (4\sqrt{6})^2$

$\Rightarrow d(R, (NRQ)) = 4\sqrt{3}\ cm$ **1p**

Inspectoratul Școlar Județean Dâmbovița
Calea Domnească, nr. 127, Târgoviște, Dâmbovița
Telefon: 0245/211891; Fax: 0245/613723;
E-mail: isjdb@isj-db.ro; Web: www.isj-db.ro