

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ PENTRU CLASELE IV – VIII
„OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA”

Etapa județeană – 12.03.2022

Clasa a VII-a

Problema 1

(7 puncte)

a) Arătați că numărul

$$n = \sqrt{\frac{102}{99} \cdot \left[\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{50 \cdot 51} \right) - \left(\frac{1}{51 \cdot 52} + \frac{1}{52 \cdot 53} + \frac{1}{53 \cdot 54} + \dots + \frac{1}{101 \cdot 102} \right) \right]}$$
 este natural;

b) Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b dacă:

$$a = \frac{12\sqrt{2}}{7} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{12}} + \frac{2}{\sqrt{75}} + \frac{3}{2\sqrt{48}} - \frac{21}{5\sqrt{27}} \right) \text{ și } b = \frac{37}{28} : \left(\frac{5}{\sqrt{24}} + \frac{19}{7\sqrt{6}} - \frac{5}{\sqrt{150}} - \frac{2}{\sqrt{384}} \right).$$

Problema 2

(7 puncte)

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\frac{x}{2 + 4 + 6 + \dots + 4042} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2021}\right)$$

Problema 3

(7 puncte)

Se consideră triunghiul $\triangle ABC$ dreptunghic isoscel și M un punct oarecare pe ipotenuza BC . Dacă $MN \perp AB, N \in AB, MP \perp AC, P \in AC$, punctul D este simetricul punctului M față de dreapta AB și punctul E este simetricul punctului M față de dreapta AC demonstrați că:

- suma $MN + MP$ este constantă;
- punctele E, A, D sunt coliniare

Problema 4

(7 puncte)

Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD, AB > CD$ astfel încât $AD \equiv CD \equiv BC$ și $AC \perp BC$, iar lungimea bazei mari $AB = 24 \text{ cm}$.

- Aflați măsurile unghiurilor trapezului $ABCD$.
- Calculați perimetrul trapezului,
- Dacă M este mijlocul laturii AB , arătați că $DM \perp AC$.

Toate subiectele sunt obligatorii!

Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.