

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023****CLASA a IX-a**

Problema 1. Fie triunghiul ABC .

a) Arătați că bisectoarea interioară a unghiului A și bisectoarele exterioare ale unghiurilor B și C se intersectează într-un punct I_A .

b) Notăm cu M, N și P proiecțiile punctului I_A pe dreptele AC, BC respectiv AB . Arătați că, dacă $\overrightarrow{I_A M} + \overrightarrow{I_A P} = \overrightarrow{I_A N}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Gazeta Matematică

Problema 2. a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$[x]^2 - x = -0,99.$$

b) Arătați că, pentru orice $a \leq -1$, ecuația $[x]^2 - x = a$ **nu** are soluții reale.

Problema 3. Dacă x, y, z sunt numere pozitive cu $x + y + z = 1$, arătați că:

a)

$$1 - \frac{x^2 - yz}{x^2 + x} = \frac{(1 - y)(1 - z)}{x^2 + x};$$

b)

$$\frac{x^2 - yz}{x^2 + x} + \frac{y^2 - zx}{y^2 + y} + \frac{z^2 - xy}{z^2 + z} \leq 0.$$

Problema 4. Determinați funcțiile strict crescătoare $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ care au proprietatea:

$$\text{numărul } f(x) \cdot f(y) \text{ divide numărul } (1 + 2x) \cdot f(y) + (1 + 2y) \cdot f(x),$$

pentru orice numere naturale x și y .

*Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*