## PROBLEME – olimpiade și concursuri

În acest material este prezentată o serie de probleme interesante care vin în sprijinul elevilor dornici de performanța la matematică, dar și în sprijinul profesorilor, acestea constituind un mic suport în pregătirea elevilor în vederea olimpiadelor și concursurilor școlare la matematică.

Problemele prezentate fac referire la conținuturile legate de capitolul divizibilitatea numerelor naturale (întregi) și la teorema împarțirii cu rest. Ele se adresează cu precădere elevilor din clasele V-VI. Rezolvările sunt complete și detaliate, putând astfel să fie înțelese cu ușurință de către elevi.

- **1. Teorema împărțirii cu rest- probleme**

Problema 1

Aflați restul împărțirii numărului $10^{2014}-1$ la 37.

Rezolvare

Observăm că $10^3 = 1000 = 37 \cdot 27 + 1$, deci $1000 = M_{37} + 1$ ( prin $M_{37}$ am notat un multiplu oarecare al lui 37 ).

Altă observație interesantă este că $(p+1)^n = M_p + 1$ și în cazul nostru avem $10^{2014} = 10^{2013} \cdot 10 = (10^3)^{671} \cdot 10 = (M_{37}+1)^{671} \cdot 10 = (M_{37}+1) \cdot 10$

Deci $10^{2014} - 1 = M_{37} + 9 \Rightarrow$ restul împărțirii lui $10^{2014} - 1$ la 37 este 9.

Problema 2.

Un număr natural împărțit la 7 dă restul 6 și împărțit la 4 dă restul 1. Care va fi restul împărțirii numărului la 28?

Rezolvare

Fie $n \in \mathbb{N}$ numarul. Vom avea : $n:7 = c_1\ rest\ 6$ si $n:4 = c_2\ rest\ 1$. Conform teoremei împărțirii cu rest avem $n = 7c_1 + 6$, respectiv $n = 4c_2 + 1$. Scăzând 13 din ambele egalitați obținem :

$$n - 13 = 7c_1 - 7 \Rightarrow (n - 13) \vdots 7$$

$$n - 13 = 4c_2 - 12 \Rightarrow (n - 13) \vdots 4$$

Cum (4,7)=1 avem $(n - 13) \vdots 28 \Rightarrow\ n - 13 = 28k\ \Rightarrow n = 28k + 13$

Deci restul împărțirii lui n la 28 este 13.

Problema 3.

Un număr natural împărțit la 15 dă câtul $c_1$ și restul 14, împărțit la 18 dă câtul $c_2$ și restul 2, iar împărțit la 24 dă câtul $c_3$ și restul 14. Dacă $c_1 - c_2 + c_3 = 12$ determinați restul împărțirii numărului la 25.

Rezolvare

Fie $n \in \mathbb{N}$ numărul

Din teorema împărțirii cu rest aplicată în cele 3 situații obținem că:

$$n = 15c_1 + 14$$

$$n = 18c_2 + 2$$

$$n = 24c_3 + 14$$

Cum c.m.m.m.c al numerelor 15, 18, 24 este 360, înmulțim corespunzător cele 3 egalitați de mai sus astfel

$$n = 15c_1 + 14 \quad /\cdot 24 \Rightarrow 24n = 360c_1 + 336 \Rightarrow 360c_1 = 24n - 336 \quad (1)$$

$$n = 18c_2 + 2 \quad /\cdot 20 \Rightarrow 20n = 360c_2 + 40 \Rightarrow 360c_2 = 20n - 40 \quad (2)$$

$$n = 24c_3 + 14 \quad /\cdot 15 \Rightarrow 15n = 360c_3 + 210 \Rightarrow 360c_3 = 15n - 210 \quad (3)$$

(1)-(2)+(3) $\Rightarrow 360(c_1 - c_2 + c_3) = 19n - 506$ și ținând cont că

$c_1 - c_2 + c_3 = 12 \Rightarrow n = 254$

$254 : 25 = 10\ rest\ 4$.

Problema 4.

Care este restul împărțirii lui $10^{1011}$ la 27 ?

Rezolvare

$10^{1011} = 1\underbrace{00\ldots\ldots0}_{1011\ de\ 0} = \underbrace{99\ldots\ldots9}_{1001\ de\ 9} + 1 = 9 \cdot \underbrace{11\ldots\ldots1}_{1011\ de\ 1} + 1.$

Numărul $\underbrace{11\ldots\ldots1}_{1011\ de\ 1}$ are suma cifrelor de 1011 ⋮ 3 $\Rightarrow$ $9 \cdot \underbrace{11\ldots\ldots1}_{1011\ de\ 1} \vdots 27 \Rightarrow 10^{1011} = \mathcal{M}_{27} + 1$,

deci restul împărțirii lui $10^{1011}$ la 27 este 1.

Problema 5.

Arătați că restul împărțirii prin 16 a unui pătrat perfect este tot un pătrat perfect.

Rezolvare

Fie $n \in \mathbb{N}$

Dacă *n* este multiplu de 16 ($\mathcal{M}_{16}$) $\Rightarrow n^2$multiplu de 16 , atunci restul împărțirii prin 16 va fi 0, deci pătrat perfect.

Dacă n este de forma $16k + r$ cu $r = \overline{1, 15}$ , atunci $n^2 = (16 + r)^2 = \mathcal{M}_{16} + r^2$

Cum $r = \overline{1, 15}$ vom avea $r^2 = \mathcal{M}_{16} + 0{,}1{,}4\ sau\ 9$ ( se verifică ușor prin calcul, spre exemplu dacă $r = 7 \Rightarrow r^2 = 49 = 48 + 1 = \mathcal{M}_{16} + 1$ )

Deci $n^2 = (16 + r)^2 = \mathcal{M}_{16} + 0{,}1{,}4\ sau\ 9$ iar restul împărțirii prin 16 va fi un pătrat perfect.

Problema 6.

Arătați că pătratul oricărui număr natural este de forma $\mathcal{M}_3,\ \mathcal{M}_3+1, \mathcal{M}_5,\ \mathcal{M}_5+1$ sau $\mathcal{M}_5+4$.

Rezolvare

Fie $n \in \mathbb{N}$ un număr

Referitor la împărțirea prin 3 a unui număr natural, acesta poate avea una din formele $3k+r$ cu $r=\overline{0,2}$

Dacă $n=3k \Rightarrow n^2=9k^2$ , adică e de forma $\mathcal{M}_3$

Dacă $n=3k+1 \Rightarrow n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1$ , adică e de forma $\mathcal{M}_3+1$

Dacă $n=3k+2 \Rightarrow n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$ , adică e de forma $\mathcal{M}_3+1$

Referitor la împărțirea prin 5 a unui număr natural, acesta poate avea una din formele $5k+r$ cu $r=\overline{0,4}$

Dacă $n=5k \Rightarrow n^2=25k^2$ , adică e de forma $\mathcal{M}_5$

Dacă $n=5k+1 \Rightarrow n^2=(5k+1)^2=25k^2+10k+1$ , adică e de forma $\mathcal{M}_5+1$

Dacă $n=5k+2 \Rightarrow n^2=(5k+2)^2=25k^2+20k+4=5(5k^2+4k)+4$, adică e de forma $\mathcal{M}_5+4$

Dacă $n=5k+3 \Rightarrow n^2=(5k+3)^2=25k^2+30k+9=5(5k^2+6k+1)+4$, adică e de forma $\mathcal{M}_5+4$

Dacă $n=5k+4 \Rightarrow n^2=(5k+4)^2=25k^2+40k+16=5(5k^2+8k+3)+1$, adică e de forma $\mathcal{M}_5+1$

Problema 7.

Aflați restul împărțirii prin 24 a numărului $A = 7^{3^m} + 5^{2n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare

Dacă $m > 0 \Rightarrow$ $3^m$ număr impar mai mare ca 1$\Rightarrow$ $3^m = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow 7^{3^m} = 7^{2k+1} = 7 \cdot 7^{2k} = 7 \cdot 49^k = 7 \cdot (48 + 1)^k = 7 \cdot (\mathcal{M}_{48} + 1) = \mathcal{M}_{24} + 7$

$5^{2n} = 24^n = (24 + 1)^n = \mathcal{M}_{24} + 1$

Deci $A = 7^{3^m} + 5^{2n} = \mathcal{M}_{24} + 7 + \mathcal{M}_{24} + 1 = \mathcal{M}_{24} + 8 \Rightarrow$restul împărțirii lui *A* la 24 este 8.

Dacă $m = 0 \Rightarrow 7^{3^m} = 7$ și, cum $5^{2n} = 24^n = (24 + 1)^n = \mathcal{M}_{24} + 1$, atunci restul împărțirii lui *A* la 24 va fi tot 8.

Problema 8.

Aflați numerele naturale care împărțite la 10 dau câtul *c* și restul *r* iar împărțite la 4 dau câtul *r* și restul *c*.

Rezolvare.

Fie $n \in \mathbb{N}$ unul din acele numere.

$n: 10 = c\ rest\ r \Rightarrow n = 10 \cdot c + r$ cu $r < 10$

$n: 4 = r\ rest\ c \Rightarrow n = 4 \cdot r + c$ cu $c < 4$, deci $10 \cdot c + r = 4 \cdot r + c\ |-c \Rightarrow$ $9 \cdot c + r = 4 \cdot r\ | - c \Rightarrow 9 \cdot c = 3 \cdot r \Rightarrow 3 \cdot r = c$

Ținând cont de faptul că $3 \cdot r = c$ și $r < 10$, $c < 4$ vom avea posibilitățile:

- $r = 9,\ c = 3 \Rightarrow n = 39$
- $r = 6,\ c = 2 \Rightarrow n = 26$

- $r = 3,\ c = 1\ \Rightarrow n = 13$
- $r = 0,\ c = 0\ \Rightarrow n = 0$

Problema 9.

Aflați c.m.m.d.c. al numerelor naturale $a$ și $b$ știind că $a + b = 86$ și împărțind pe $a$ la $b$ obținem câtul 4 și restul $r$ .

Rezolvare

$a: b = 4\, rest\, r,\ r < b \Rightarrow a = 4b + r$ si înlocuind în cealaltă relație obținem $5b + r = 86$

$a = 4b + r$ cu $r < b \Rightarrow 4b + r < 5b$

Deci, $4b < a < 5b \mid + b \Rightarrow 5b < a + b < 6b$ și, cum $a + b = 86$

$\Rightarrow \begin{cases} 5b < 86 \Rightarrow b \le 17 \\ 6b > 86 \Rightarrow b > 14 \end{cases}$, deci $b \in \{15, 16, 17\}$.

- Dacă $b = 15 \Rightarrow a = 71\ \Rightarrow c.m.m.d.c. = 1$
- Dacă $b = 16 \Rightarrow a = 70\ \Rightarrow c.m.m.d.c. = 2$
- Dacă $b = 17 \Rightarrow a = 69\ \Rightarrow c.m.m.d.c. = 1$

Problema 10.

Un număr natural împărțit la 8 dă restul 5 și împărțit la 9 dă restul 7. Aflați care va fi restul împărțirii numărului la 72.

Rezolvare

Fie $n \in \mathbb{N}$ numărul.

$\left.\begin{matrix} n: 8 = k\, rest\ 5 \Rightarrow n = 8k + 5 \\ n: 9 = p\, rest\ 7 \Rightarrow n = 9p + 7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 8k + 5 = 9p + 7 \Rightarrow$

$8k-7=9p-5|-49 \Rightarrow 8k-56=9p-54 \ \Rightarrow 8(k-7)=9(9-5)$

și, cum 8 și 9 sunt prime intre ele $\Rightarrow 9|k-7 \Rightarrow k-7=9t, t \in \mathbb{N} \Rightarrow k=9t+7$

deci $n=8k+5=8(9t+7)+5=72t+61$ și, cum 61<72 , putem afirma că restul împărțirii lui n la 72 este 61.

Problema 11.

Aflați restul împărțirii numărului $n=1^{2013}+2^{2013}+3^{2013}+\cdots+2013^{2013}$ la 5.

Rezolvare

Vom nota cu $U(m)$ ultima cifră a numărului $m$.

Avem $U(1^{2013})=1$; $U(2^{2013})=2$; $U(3^{2013})=3$ ; $U(4^{2013})=4$

$U(5^{2013})=5$; $U(6^{2013})=6$; $U(7^{2013})=7$ ; $U(8^{2013})=8$

$U(9^{2013})=9$; $U(10^{2013})=0$, deci ultima cifră a sumei primilor 10 termeni este 5.

Putem afirma fară dubii că $U(1^{2013})=U(11^{2013})$; $U(2^{2013})=U(12^{2013})$ și așa mai departe. Grupând câte 10 termenii care apar în *n* vom obține 201 grupe de 10 numere a căror ultimă cifră a propriei lor sume este 5. Deci, adunând primii 2010 termeni vom obține ultima cifră 5

De asemenea $U(2011^{2013})=1$; $U(2012^{2013})=2$ ; $U(2013^{2013})=3$ și, în concluzie, însumând ultimele cifre vom obține $U(n)=1$. Dacă ultima cifră a lui *n* este 1, atunci este evident că restul împărțirii la 5 a numărului *n* va fi 1.

## 2. Divizibilitate - probleme

Poblema 12.

Dacă $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x \vdots 2$ , $y \vdots 3$ si $(x+y) \vdots 6$ rezultă că $x \vdots 3$ și $y \vdots 2$ ?

Rezolvare

$x \vdots 2 \Rightarrow x = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}$

$y \vdots 3 \Rightarrow y = 3p,\ \ p \in \mathbb{Z}$

$(x+y) = 2k + 3p \vdots 6 \Rightarrow 2k + 3p \vdots 2\ si\ 3$

Din $2k + 3p \vdots 2 \Rightarrow 3p \vdots 2 \Rightarrow p \vdots 2 \Rightarrow y = 3p \vdots 2$

Din $2k + 3p \vdots 3 \Rightarrow 2k \vdots 3 \Rightarrow k \vdots 3 \Rightarrow x = 2k \vdots 3$

Deci răspunsul este DA.

Problema 13.

Aflați numerele natural prime $a$ , $b$ astfel încât sa fie îndeplinite simultan condițiile:

i) $(a,b) \cdot [a,b] = 2^p \cdot 3^q \cdot 5^r,\ \ p < q < r$ naturale nenule

ii) $a \cdot b$ are 60 de divizori întregi

Rezolvare

$a, b$ prime $\Rightarrow (a,b) = 1$, cum $(a,b) \cdot [a,b] = a \cdot b \Rightarrow$ numărul $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$ are 60 de divizori întregi, adică 30 de divizori naturali.

Atunci $(p+1) \cdot (q+1) \cdot (r+1) = 30$ și cum $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ,și $p < q < r \Rightarrow p + 1 = 2,\ \ q + 1 = 3,\ \ r + 1 = 5 \Rightarrow p = 1,\ q = 2, r = 4$

Deci $a \cdot b = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^4$

Cum $(a,b)=1 \Rightarrow\ a=2\ si\ b=3^2\cdot 5^4$ și invers

$a=3^2\ si\ b=2^1\cdot 5^4$ și invers

$a=5^4\ si\ b=2^1\cdot 3^2$ și invers

In concluzie, avem 6 soluții.

Problema 14.

Să se arate că nu exista niciun număr natural *n* pentru care expresia $n^4+n^3+n^2+n+1$ este divizibilă cu 7

Rezolvare

Fie $n\in\mathbb{N}$, *n* poate avea una din formele $7k+r,$ cu $r=\overline{0,6}$ (relative la împartirea cu 7)

Dacă $=7k \Rightarrow n^4,n^3,n^2\ \vdots\ 7\ \Rightarrow n^4+n^3+n^2+n+1=\mathcal{M}_7+1$, adică expresia nu este divizibilă cu 7. (am notat cu $\mathcal{M}_7$ un multiplu al lui 7)

Dacă $n=7k+1 \Rightarrow n^4=\mathcal{M}_7+1, n^3=\mathcal{M}_7+1, n^2=\mathcal{M}_7+1\ \Rightarrow n^4+n^3+n^2+n+1=\mathcal{M}_7+5$ , deci expresia nu este divizibilă cu 7.

Dacă $n=7k+2 \Rightarrow n^4=\mathcal{M}_7+2, n^3=\mathcal{M}_7+1, n^2=\mathcal{M}_7+4\ \Rightarrow n^4+n^3+n^2+n+1=\mathcal{M}_7+3$ ,așa că expresia nu este divizibilă cu 7.

Analog pentru celelate cazuri. În această problemă am folosit proprietatea: $(a+b)^n=\mathcal{M}_a+b^n$.

Problema 15.

Suma a 11 numere naturale distincte este 70 . Arătați că produsul lor este divizibil cu 420.

Rezolvare

În primul rând observăm că $420=3\cdot 4\cdot 5\cdot 7$

In mod evident, dacă un număr este 0, atunci produsul va fi 0, deci divizibil cu 420.

Astfel putem presupune că numerele sunt nenule . Vom demonstra că cel puțin un număr din cele 11 este divizibil cu 3. Presupun prin reducere la absurd că niciunul din cele 11 numere nu este multiplu de 3. Avem 1+2+4+5+7+8+10+11+13+14+16=91 >70 contradicție, deci cel puțin un număr este divizibil cu 3, rezultă produsul divizibil cu 3.

Vom demonstra că cel puțin un număr din cele 11 este divizibil cu 4. Presupun prin reducere la absurd că niciunul din cele 11 numere nu este multiplu de 4. Avem 1+2+3+5+6+7+9+10+11+13+14=81 >70 contradicție, deci cel puțin un număr este divizibil cu 4, rezultă produsul divizibil cu 4.

In mod analog se demonstrează că cel puțin un număr din cele 11 este divizibil cu 5 si cel puțin unul cu 7, rezultă produsul divizibil cu 5 și 7.

Cum 3,4,5,7 prime între ele, atunci produsul celor 11 numere va fi divizibil cu 420.

Problema 16.

Demonstrați că numărul $N = 1997^{2013} - 1999^{2012} - 1 \vdots 3$

Rezolvare

Plecăm de la faptul că 1998 ⋮ 3 și ne folosim de proprietatea $(a+1)^n = \mathcal{M}_a + 1$.

$1997^{2013} = (1998-1)^{2013} = \mathcal{M}_{1998} - 1 = \mathcal{M}_3 - 1$

$1999^{2012} = (1998+1)^{2012} = \mathcal{M}_{1998} + 1 = \mathcal{M}_3 + 1$

Deci $N = 1997^{2013} - 1999^{2012} - 1 = (\mathcal{M}_3 - 1) - (\mathcal{M}_3 + 1) - 1 = \mathcal{M}_3 - 3$ adică $\mathcal{M}_3$, atunci numărul $N$ este divizibil cu 3.

Problema 17.

Dacă suma pătratelor a 2 numere întregi este divizibilă cu 11, atunci arătați că și suma numerelor va fi divizibilă cu 11.

Rezolvare

Fie $n \in \mathbb{N}$. Referitor la împărțirea prin 11, el poate fi de forma $n = 11k + r$, cu $r = \overline{0, 10} \Rightarrow n^2 = \mathcal{M}_{11} + r^2$

Avem succesiv cazurile:

$$0^2 = 0 = \mathcal{M}_{11}$$

$$1^2 = 1 = \mathcal{M}_{11} + 1$$

$$2^2 = 4 = \mathcal{M}_{11} + 4$$

$$3^2 = 9 = \mathcal{M}_{11} + 9$$

$$4^2 = 16 = \mathcal{M}_{11} + 5$$

$$5^2 = 25 = \mathcal{M}_{11} + 3$$

$$6^2 = 36 = \mathcal{M}_{11} + 3$$

$$7^2 = 49 = \mathcal{M}_{11} + 5$$

$$8^2 = 64 = \mathcal{M}_{11} + 9$$

$$9^2 = 81 = \mathcal{M}_{11} + 4$$

$$10^2 = 100 = \mathcal{M}_{11} + 1$$

Deci, putem spune că $n^2 = \mathcal{M}_{11} + t,$ unde $t \in \{0,1,3,4,5,9\}$.

Ținând cont că $n^2 + m^2 \vdots 11$, va rezulta că $n^2$ si $m^2$ vor fi divizibile cu 11, pentu că oricum am aduna două resturi $t \in \{0,1,3,4,5,9\}$ nu obținem 11. Deci *m* și *n* vor fi divizibile cu 11, adică suma lor va fi divizibilă cu 11.

Problema 18

Aflați numerele naturale $a$ și $b$ dacă $a + b = 667$ și $[a, b] = 120 \cdot (a, b)$, unde $[a, b]$ reprezintă c.m.m.m.c iar $(a, b)$ reprezintă c.m.m.d.c al celor doua numere.

Rezolvare

Din proprietatea $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b \Rightarrow [a, b] = \frac{a \cdot b}{(a,b)}$.

Fie $d = (a, b) \Rightarrow d|a \Rightarrow a = k \cdot d,\ k \in \mathbb{N}$

$d|b \Rightarrow b = p \cdot d,\ p \in \mathbb{N}$ cu $(k, p) = 1$

$\frac{a \cdot b}{(a,b)} = 120 \cdot (a, b) \Rightarrow \frac{p \cdot k \cdot d^2}{d} = 120 \cdot d \Rightarrow p \cdot k \cdot d = 120 \cdot d \Rightarrow p \cdot k = 120$

$k \cdot d + p \cdot d = 667 \Rightarrow d \cdot (k + p) = 667 = 23 \cdot 29$ . Avem cazurile:

1) $d = 23 \quad k + p = 29$ și, cum $p \cdot k = 120$, va rezulta după calcule că $p = 5 \quad k = 24$ , adică $a = 552 \quad b = 115$ și invers.
2) $d = 29 \quad k + p = 23$ și, cum $p \cdot k = 120$, va rezulta după calcule că $p = 8 \quad k = 15$, adică $a = 435 \quad b = 232$ și invers.

Problema 19

Fie $x, y, z \in \mathbb{N}$ astfel încât $2x - 3y = 10z$. Arătați că numărul $P = y(x + z)(x + y) \vdots 30$.

Rezolvare

Vom pleca de la descompunerea în factori primi a lui 30 și anume $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Vom arăta pe rând că $P$ este divizibil cu 2, 3 și 5.

$2x - 3y = 10z$, cum $2x \vdots 2$ si $10z \vdots 2$ va rezulta că și $3y \vdots 2 \Rightarrow y \vdots 2 \Rightarrow P \vdots 2$

$2x - 3y = 10z \;|+2z \Rightarrow 2x - 3y + 2z = 12z \Rightarrow 2(x+z) = 12z + 3y$

cum $12z + 3y \;\vdots\; 3 \Rightarrow 2(x+z) \;\vdots\; 3$, adica $(x+z) \;\vdots\; 3 \Rightarrow P \;\vdots\; 3$

$2x - 3y = 10z \;|+5y \Rightarrow 2z + 2y = 10z + 5y \Rightarrow 2(z+y) = 10z + 5y$ . Cum $10z + 5y \;\vdots\; 5$ $\Rightarrow 2(z+y) \;\vdots\; 5$, adica $(z+y) \;\vdots\; 5 \Rightarrow P \;\vdots\; 5$

In concluzie $\Rightarrow P \;\vdots\; 2{,}3 \; si \; 5 \Rightarrow P \;\vdots\; 30$

Problema 20.

Determinați numerele naturale nenule $a$ și $b$ cu $a<b$ pentru care avem $3 \cdot [a,b] + 5 \cdot (a,b) = 123$, unde $[a,b]$ reprezintă c.m.m.m.c iar $(a,b)$ reprezintă c.m.m.d.c al celor doua numere.

Rezolvare

Fie $[a,b] = m$ și $(a,b) = d$.

Avem $(a,b) \cdot [a,b] = a \cdot b \Rightarrow [a,b] = \frac{a \cdot b}{d}$

$$(a,b) = d \Rightarrow \begin{cases} d \,|a \Rightarrow a = kd, & k \in \mathbb{N} \\ d \,|b \Rightarrow b = pd, & p \in \mathbb{N}, \quad (k,p) = 1 \end{cases}$$

Relația $3 \cdot [a,b] + 5 \cdot (a,b) = 123$ devine $3 \cdot \frac{ab}{d} + 5d = 123 \Rightarrow 3 \cdot \frac{kpd^2}{d} + 5d = 123 \Rightarrow 3kpd + 5d = 123$.

Cum 123 si $3kpd$ sunt divizibile cu 3 $\Rightarrow 5d \;\vdots\; 3 \Rightarrow d \;\vdots\; 3 \Rightarrow d = 3t$, unde $t \in \mathbb{N}$.

Din $3kpd + 5d = 123 \Rightarrow 9kpt + 15t = 123 \;|:3 \Rightarrow 3kpt + 5t = 41 \Rightarrow t(3kp + 5) = 41$ și cum 41 este numar prim vom avea cazurile:

1) $t = 41 \quad 3kp + 5 = 1$ , ceea ce este imposibil
2) $t = 1 \quad 3kp + 5 = 41$ . Din $t = 1 \Rightarrow d = 3$ și din $3kp + 5 = 41 \Rightarrow kp = 12$. Cum $(k,p) = 1$ și $a < b \Rightarrow$

- $k = 3 \quad p = 4$ adică $a = 9$ și $b = 12$ sau
- $k = 1 \quad p = 12$ adică $a = 3$ și $b = 36$

Problema 21.

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $5 \mid 2^n + 3^m$ . Arătați că $5 \mid 2^m + 3^n$.

Rezolvare

Ultima cifră a lui $2^n$ este 2,4,8,6 și se repetă din 4 în patru.

Ultima cifră a lui $3^n$ este 3,9,7,1 și se repetă din 4 în patru.

Din faptul că $5 \mid 2^n + 3^m \Rightarrow$ultima cifră a lui $2^n + 3^m$ este 0 sau 5. Pentru a obține ultima cifră 0 sau 5 vom avea posibilitățile ( notez prin $U(n)$ =ultima cifră a lui *n*):

- $n = 4k + 1$ și $m = 4p + 1 \;\; \Rightarrow U(2^n) = 2 \text{ și } U(3^m) = 3 \quad 3 + 2 = 5.$ În acest caz avem $U(2^m) = 2 \text{ și } U(3^n) = 3 \Rightarrow U(2^m + 3^n) = 5$, adică $5 \mid 2^m + 3^n$
- $n = 4k + 2$ și $m = 4p \;\; \Rightarrow \; U(2^n) = 4 \text{ și } U(3^m) = 1 \quad 4 + 1 = 5$ . În acest caz avem $U(2^m) = 6 \text{ și } U(3^n) = 9 \Rightarrow U(2^m + 3^n) = 5$, adică $5 \mid 2^m + 3^n$
- $n = 4k + 3$ si $m = 4p + 3 \;\; \Rightarrow \;\; U(2^n) = 8 \; si \; U(3^m) = 7 \quad 8 + 7 = 15.$ În acest caz avem $U(2^m) = 8 \text{ și } U(3^n) = 7 \Rightarrow U(2^m + 3^n) = 5$, adică $5 \mid 2^m + 3^n$
- $n = 4k$ și $m = 4p + 2 \;\; \Rightarrow \quad U(2^n) = 6 \text{ și } U(3^m) = 9 \quad 6 + 9 = 15$ . În acest caz avem $U(2^m) = 4 \text{ și } U(3^n) = 1 \Rightarrow U(2^m + 3^n) = 5$, adică $5 \mid 2^m + 3^n$

Deci, în concluzie, $5 \mid 2^m + 3^n$.

Problema 22.

Arătați că numarul $A = 2^n + 1$ nu este divizibil cu 15 oricare ar fi $\in \mathbb{N}$ .

Rezolvare

Plecăm de la observația că $2^4 = 16$ și analizăm pe rând cazurile obținute luându-l pe $n = 4k + r$ cu $= \overline{0,3}$ , $k \in \mathbb{N}, k > 0$

- Dacă avem $n = 4k \Rightarrow A = 2^{4k} + 1 = 16^k + 1 = (15+1)^k + 1 = \mathcal{M}_{15} + 1 \Rightarrow 15 \nmid A$
- Dacă avem $n = 4k+1 \Rightarrow A = 2^{4k+1} + 1 = 2 \cdot 16^k + 1 = 2 \cdot (15+1)^k + 1 = \mathcal{M}_{15} + 3 \Rightarrow 15 \nmid A$
- Dacă avem $n = 4k+2 \Rightarrow A = 2^{4k+2} + 1 = 4 \cdot 16^k + 1 = 4 \cdot (15+1)^k + 1 = \mathcal{M}_{15} + 5 \Rightarrow 15 \nmid A$
- Dacă avem $n = 4k+3 \Rightarrow A = 2^{4k+3} + 1 = 8 \cdot 16^k + 1 = 8 \cdot (15+1)^k + 1 = \mathcal{M}_{15} + 9 \Rightarrow 15 \nmid A$

În cazul în care $k = 0$, deci $n \in \{0,1,2,3\}$, este evident că $2^n + 1$ nu este divizibil cu 15.

Problema 23.

Aflați un număr de 5 cifre divizibil cu 3 și 11, care are 63 de divizori naturali.

Rezolvare

Știm că dacă descompunerea în factori primi a unui număr natural este $n = {p_1}^{q_1} \cdot {p_2}^{q_2} \cdot {p_3}^{q_3} \cdot \dots \cdot {p_m}^{q_m}$, atunci numărul de divizori ai lui *n* este $(q_1+1) \cdot (q_2+1) \cdot (q_3+1) \cdot \dots \cdot (q_m+1)$. Deci, dacă notăm cu *n* numărul căutat putem spune că toți exponenții care apar în descompunerea în factori sunt pari ⇒ *n* se divide cel putin cu $3^2 \cdot 11^2 = 1089$

Cum 7 | 63 și 7 este număr prim ⇒ în descompunerea în factori a lui *n* un factor are exponentul 6. Dar împărțind pe cel mai mare număr de 5 cifre (99999) la 1089 ne dă un cât de 2 cifre, deci factorul din descompunerea lui *n* care are exponentul 6 nu poate fi decât 2.

In concluzie, numărul căutat este $n = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11^2 = 69696$.

Problema 24.

Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ arătați că numărul $a^2 + b^2$ este diferența a două patrate perfecte dacă și numai dacă numărul $a \cdot b$ este par.

Rezolvare

Demonstăm mai întai implicația directă "⇒"

Știm că $a^2 + b^2 = m^2 - n^2$ (adică diferența a două pătrate) și demonstrăm că $a \cdot b$ este par.

Presupun prin reducere la absurd că numărul $a \cdot b$ este impar ⇒ $a$ și $b$ sunt impare⇒ $a = 2k + 1 \quad b = 2p + 1$, deci $a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2p + 1)^2 = \mathcal{M}_4 + 1 + \mathcal{M}_4 + 1 = \mathcal{M}_4 + 2$

Pe de altă parte avem $a^2 + b^2 = m^2 - n^2 = (m - n) \cdot (m + n)$ și cum $a$ și $b$ impare avem $a^2 + b^2$ par ⇒ $(m - n) \cdot (m + n)$ număr par ⇒ $(m - n)$ și $(m + n)$ numere pare și în acest caz $(m - n) \cdot (m + n) = a^2 + b^2$ va fi multiplu de 4, ceea ce este în contradicție cu faptul că $a^2 + b^2$ este $\mathcal{M}_4 + 2$. Deci, presupunerea facută este falsă, atunci $a \cdot b$ este par.

Demonstrăm implicația indirectă "⇐"

Știm că $a \cdot b$ este par și demonstrăm că $a^2 + b^2$ este o diferență de pătrate.

Dacă $a \cdot b$ este par avem două situații:

- $a$ și $b$ amândouă pare ⇒ $\begin{cases} a = 2k, & k \in \mathbb{N} \\ b = 2p, & p \in \mathbb{N} \end{cases}$ ⇒

  $a^2 + b^2 = 4k^2 + 4p^2 = \mathcal{M}_4$, deci putem scrie $a^2 + b^2 = 4t = (t + 1)^2 - (t - 1)^2$, adică diferență de două pătrate.

- $a$ și $b$ sunt unul par și celălalt impar ⇒ $\begin{cases} a = 2k, & k \in \mathbb{N} \\ b = 2p + 1, & p \in \mathbb{N} \end{cases}$ ⇒

  $a^2 + b^2 = 4k^2 + (2p + 1)^2 = 4k^2 + 4p^2 + 4p + 1 = \mathcal{M}_2 + 1$, deci

  putem scrie $a^2 + b^2 = 2s + 1 = (s + 1)^2 - s^2$, adică diferență de doua pătrate.

Problema 25.

Dacă un număr natural de 6 cifre se divide cu 37, atunci arătați că și numărul obținut din acesta, prin mutarea primei cifre din stânga la sfârșit, se divide cu 37.

Rezolvare.

Fie $x = \overline{abcdef}$ numărul de 6 cifre scris în baza 10, divizibil cu 37 ⇒ numărul obținut din $x$, prin mutarea primei cifre din stânga la sfârșit, va fi $y = \overline{bcdefa}$

$x = \overline{abcdef} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + 10 \cdot e + f \Rightarrow 10 \cdot x =$

$a \cdot 10^6 + b \cdot 10^5 + c \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + 10^2 \cdot e + 10 \cdot f$ și, cum

$y = \overline{bcdefa} = b \cdot 10^5 + c \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + 10^2 \cdot e + 10 \cdot f + a \Rightarrow y = 10 \cdot x - 999999 \cdot a$

Dar $37 \mid x$ și $37 \mid 999999 \Rightarrow 37 \mid y$

Problema 26.

Fie $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ astfel încât $7x + 5y - 2z - 2t = 0$. Determinați ultima cifră a numărului $A = (11x + 9y) \cdot (z + t - x)$

Rezolvare

Din $7x + 5y - 2z - 2t = 0 \Rightarrow 7x + 5y = 2z + 2t$ și, cum $2z + 2t \vdots 2 \Rightarrow 7x + 5y \vdots 2$ (1)

Relația $7x + 5y - 2z - 2t = 0$ o scriem $5x + 5y - 2z - 2t + 2x = 0 \Leftrightarrow 5x + 5y = 2z + 2t - 2x \Leftrightarrow 5(x + y) = 2(z + t - x)$ și, cum $5(x + y) \vdots 5 \Rightarrow 2(z + t - x) \vdots 5 \Rightarrow (z + t - x) \vdots 5$ (2)

Din (1) și (2) ⇒ $A = (11x + 9y) \cdot (z + t - x) \vdots 10$, atunci ultima cifră a lui $A$ va fi 0.

Problema 27.

Se  consideră mulțimea $M = \{7^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Să se arate că orice sumbulțime cu 5 elemente a lui *M* conține cel puțin 2 numere a căror diferență este divizibilă cu 25.

Rezolvare.

Pentru început, ținând cont de criteriul de divizibilitate cu 25, care face referire la ultimele 2 cifre ale numărului, vom determina ultimele 2 cifre ale numărului $7^n$

Avem $7^1 = 7$ $\quad 7^2 = 49$ $\quad 7^3 = 343$ $\quad 7^4 = 2041$

$7^5 = 16807$ $\quad 7^6$=……49 $\quad 7^7$=………43 $\quad 7^8$ =……01

Deci, putem spune ca ultimele 2 cifre ale lui $7^n$ sunt $\begin{cases} 07, & n = 4k+1 \\ 49, & n = 4k+2 \\ 43, & n = 4k+3 \\ 41, & n = 4k \end{cases}$

Acum, oricum am alege 5 elemente din *M,* cel puțin două dintre ele vor avea aceleași ultime două cifre, deci diferența lor va avea ca ultime două cifre cifrele 00 și, conform criteriului de divizibilitate cu 25,  va fi divizibilă cu 25.

Problema 28.

Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ care se divid prin 7 și care au proprietatea că $a + b + c$ se divide prin 7.

Rezolvare.

$\overline{abc} = 100a + 10b + c$

Trebuie observat că $98 \vdots 7$ , atunci putem scrie $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 98a + 7b + c + 2a + 3b$ și, ținând cont că $a + b + c \vdots 7$, putem continua și scrie

$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 98a + 7b + c + 2a + 3b = 98a + 7b + 2(a + b + c) + b - c$ și, cum $\overline{abc} ⋮ 7$, $98a ⋮ 7$, $2(a + b + c) ⋮ 7$, va rezulta că și $b - c ⋮ 7$

Deci, $b - c \in \{-7, 0, 7\}$.

- Dacă b$-c = 0 \Rightarrow b = c \Rightarrow$

$\overline{abc} \in \{700, 511, 322, 133, 833, 644, 455, 266, 966, 777, 588, 399\}$

- Dacă b$-c = 7 \Rightarrow c \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow \overline{abc} \in \{770, 581, 392\}$
- Dacă b$-c = -7 \Rightarrow$ c $- b = 7 \Rightarrow b \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow \overline{abc} \in$

$\{707, 518, 329\}$

Problema 29.

Se dau numerele $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, astfel încât avem relațiile $a(b + c) = 2009$; $b(a + c) = 2010$; $c(a + b) = 2011$. Aflați câți divizori are numărul $(a \cdot b \cdot c)^2$.

Rezolvare.

$$\left.\begin{array}{l} a(b + c) = 2009 \Rightarrow ab + ac = 2009 \\ b(a + c) = 2010 \Rightarrow ba + bc = 2010 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(scăzând relațiile) } bc - ac = 1$$

$c(a + b) = 2011 \Rightarrow ac + bc = 2011$

Din relațiile $\left.\begin{array}{c} bc - ac = 1 \\ ac + bc = 2011 \end{array}\right\} \Rightarrow$ (adunându-le) $2bc = 2012 \Rightarrow bc = 1006$.

Cum $bc = 1006 \Rightarrow ac = 1005$ $și$ $ab = 1004$.

Acum avem $\left.\begin{array}{r} ab = 1004 \\ ac = 1005 \\ bc = 1006 \end{array}\right\} \Rightarrow$ (înmulțindu-le) $ab \cdot ac \cdot bc = 1004 \cdot 1005 \cdot 1006 \Rightarrow$

$(a \cdot b \cdot c)^2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \cdot 251 \cdot 503$, atunci numărul de divizori ai numărului $(a \cdot b \cdot c)^2$ este $(3 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 128$

Problema 30.

Să se determine un număr par, știind că numărul divizorilor săi este 15, iar suma divizorilor săi este 5467.

Rezolvare.

Înainte de a rezolva problema prezentăm două rezultate ( unul destul de des folosit și cunoscut de elevii de gimnaziu) cu privire la divizorii unui număr natural.

Dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$, atunci avem :

1. Numărul divizorilor naturali ai lui *n* este $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1)$
2. Suma divizorilor naturali ai lui *n* este $\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot ... \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$.

Fie $n \in \mathbb{N}$ numărul căutat. Numărul fiind par sigur unul din factorii primi din descompunere este 2.

Numărul divizorilor este $15 = 3 \cdot 5$, înseamnă că *n* are cel mult doi factori primi în descompunere. Numărul *n* nu poate avea un singur factor ( adică nu poate fi o putere ) pentru că $2^{14} \neq 5467$, deci *n* va avea în descompunere exact 2 factori primi, dintre care unul este 2.

Deci $n = 2^4 \cdot p^2$ sau $n = 2^2 \cdot p^4$ și, ținând cont de formula sumei divizorilor unui număr natural, vom avea 2 situatii:

- $n = 2^4 \cdot p^2 \Rightarrow$ suma divizorilor este $\frac{2^5-1}{2-1} \cdot \frac{p^3-1}{p-1} = 5476$ ecuație care în urma calculelor nu are soluții naturale.
- $n = 2^2 \cdot p^4 \Rightarrow$ suma divizorilor este $\frac{2^3-1}{2-1} \cdot \frac{p^5-1}{p-1} = 5476$, cu solutia $p = 5$

Deci $n = 2^2 \cdot 5^4 = 2500$.

Profesor Boboc Ion Alexandru

Școala Gimnazială Ioan Alexandru Brătescu-Voinești

## Bibliografie


- Ion D. Ion , R. Nicolae - Algebră, Ediţia a III-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
- Ion Cucurezeanu – Probleme de aritmetică si teoria numerelor, Editura Tehnica, Bucuresti 1976
- N. Grigore, S. Ion, R. Mâinea, T. Popa – Matematică olimpiade și concursuri școlare, editura Nomina
- M.G.Pascale – Matematica pentru concursuri
- S.S.M.R. – Gazeta matematică