VARIANTE DE REZOLVARE A UNOR PROBLEME SELECTATE DIN

GAZETA MATEMATICĂ ȘI DA LA DIVERSE COMPETIȚII

AUTOR:COTEA MARIANA EUGENIA

Rezolvarea unei probleme cu grad sporit de dificultate este întotdeauna o provocare pentru orice pasionat de matematică.În cazul problemelor extrem de dificile găsirea unei variante de rezolvare îl mulțumește pe rezolvitor .De obicei însă gândirea matematică nu se rezumă doar la găsirea unei variante de rezolvare.Poate că frumusețea raționamentului matematic este dată nu atât de găsirea unei căi de rezolvare ci de găsirea mai multor variante de rezolvare a unei probleme date.La geometrie de exemplu multe probleme se pot rezolva în diferite moduri apelând la diverse construcții ajutătoare.În multe cazuri o construcție ingenioasă te scutește de calcule laborioase sau de utilizarea unor rezultate teoretice mai tari care depășesc nivelul de cunoștințe al unui elev aflat pe o anumită treaptă de studiu.Sunt situații în care nemulțumiți de o primă variantă de rezolvare găsită căutăm o soluție mai simplă , mai directă.Am întâlnit deseori elevi care refuzau să abordeze o problemă pentru simplul motiv că la clasă nu au lucrat una asemănătoare.Elevii care au nevoie de tipare pentru rezolvarea problemelor nu pot intra în categoria elevilor cu aptitudini pentru matematică.Elevul pasionat de matematică nu caută tiparele, el chiar își dorește să iasă din tipare,să caute soluții originale.Cu siguranță nu toți elevii au înclinații pentru matematică și chiar este inuman să chinui pe cineva să performeze într-un domeniu în care nu este apt sau pentru care nu simte nici o atracție.Dar în cazul celorlalți elevi modalitatea cea mai simplă de a-i scoate din tipare este de a le propune probleme și a-i solicita să construiască diverse variante de rezolvare.

Ceea ce este esențial în rezolvarea unei probleme este bagajul de cunoștințe,capacitatea de a le combina ținând cont de un context dat și mai ales perseverența care implică acel efort de gândire pe care mulți elevi refuză să-l facă.

PROBLEMA 1.

Următoarea problemă este propusă la al 5-lea test de selecție pentru O.B.M. - juniori-2004 și apare publicată în G.M. nr 7-8/2004.

,,Fie M,N,P mijloacele laturilor BC,CA și respectiv AB,ale triunghiului ABC cu centrul de greutate G.Să se arate că dacă 2BN= AB și BMGP este patrulater inscriptibil,atunci ABC este un triunghi echilateral,,

VARIANTA 1 de rezolvare:

Se efectuează următoarea construcție ajutătoare:

Se construiește punctul Q simetricul lui B față de N.Patrulaterul BCQA este paralelogram deoarece diagonalele lui se înjumătățesc.

BCQA -paralelogram implică AQ=BC și AQBC.

Din AQ||BC utilizând secanta AB se obține:

(1) și (2)(ca unghiuri interne de aceeași parte a secantei)

Din PBMG -patrulater inscriptibil se deduce (3) și în plus (4)

Din relațiile (1) și (4) se obține (5) și din relațiile (2) și (3) se obține (6)

Din relațiile (5),(6) se deduce că triunghiurile QAB și PGM sunt asemenea.Conform definiției asemănării rezultă:

care implică, ținând cont că BQ=2BN=AB, următorul șir de rapoarte egale:

unde notațiile sunt cele obișnuite pentru un triunghi ABC.

Din (ipoteză) și se obține 2a2=b2+c2.Pe de altă parte din (7) și deoarece se obține b=a.

Din 2a2=b2+c2 și b=a se obține a=c care implică a=b=c deci triunghiul ABC este echilateral(c.c.t.d)

OBSERVAȚIE:În cadrul acestei variante anumite raționamente puteau fi înlocuite cu altele:

Astfel deoarece triunghiul ABC are a=b se obține că triunghiul ABC este isoscel de bază BC și prin urmare mediana CP este și înălțime .UnghiulBPC fiind drept iar patrulaterul PBGM inscriptibil se obține unghiul AMB drept deci AM este mediatoarea laturii BC.În consecință AB=AC adică în notațiile convenite c=b.Din b=a și c=b se obține a=b=c deci triunghiul ABC este echilateral.(c.c.t.d.)

VARIANTA AII A

Se construiește simetricul centrului de greutate G față de M fie acesta T.Patrulaterul BGCT este paralelogram pentru că diagonalele se înjumătățesc.Din BGCT paralelogram se obține:

BT=GC=

Pe de altă parte din PM||AC (ca linie mijlocie în triunghiul ABC) implică

(5)

Relațiile (2),(5)implică congruența unghiurilor BTG și B.

Relațiile (3),(4) implică congruența unghiurilor BGM și A.

În triunghiurile BGT și ABC avem prin urmare congruențele de unghiuri:

Se obține următorul șir de rapoarte egale: de unde

.(6)

Din ipoteză

se deduce ca și în varinta 1 de rezolvare 2a2=c2+b2.(8)

Din relația (8) și utilizând teorema medianei pentru celelalte două mediane obținem: .

Din relațiile (6),(7),(9),(10) se obține: de unde utilizând o proprietate a șirului de rapoarte egale deducem:.Prin urmare a=b=c deci triunghiul ABC este echilateral(c.c.t.d.)

VARINTA 3.

Următoarea variantă de demonstrație utilizează teoreme care vizează aria.Să observăm mai întâi că, deoarece G descompune un triunghi în trei triunghiuri de arii egale iar mediana descompune un triunghi în două triunghiuri de arii egale ,avem:

ABGM=ABPG= (1)

Pe de altă parte ABGM= (3)

Deoarece patrulaterul BMGP este inscriptibil se obține că unghiurile opuse M și P sunt suplementare deci sin M=sinP (4).

Din relațiile (1),(2),(3),(4) se obține că a·ma=c·mc (\*)

Ca și în varianta 2 de rezolvare a problemei ,din ipoteză și aplicarea teoremei medianei se obține 2a2=c2+b2 (5)și

(7).Din relațiile (\*),(6),(7)se obține a2=bc (8).Relațiile (5),(8) ne conduc la (c-b)2=0 echivalent cu b=c (9).Din (8),(9) se obține a=b=c deci triunghiul ABC este echilateral(c.c.t.d.)

VARIANTA 4

Deoarece patrulaterul BMGP este inscriptibil utilizând puterea punctului C față de cercul circumscris acestui patrulater obținem:

CM·CB=CG·CP ceea ce este echivalent cu: .Se obține că

.Pe de altă parte ca și în cazul variantelor anterioare ipoteza ne conduce prin aplicarea teoremei medianei la relația 2a2=b2+c2 (2)și implicit la (3).Din relațiile (1) și (3) se obține a=b (4).Relațiile (2) și (4) ne conduc la a=b=c deci triunghiul ABC este echilateral.(c.c.t.d)

OBSEVAȚIE:Se putea înlocui aplicarea puterii unui punct față de un cerc(noțiune mai puțin accesibilă unui elev de gimnaziu) cu aplicarea unui caz de asemănare pentru triunghiurile CGM și CBP.

VARIANTA 5

Deoarece patrulaterul BMGP este inscriptibil conform Teoremei lui Ptolomeu obținem:BG·PM=PG·BM+GM·PB care, utilizând notațiile corespunzătoare unui triunghi ABC,este echivalentă cu:

de unde se deduce2bmb=amc+cma (1)

Pe de altă parte ca și în cazul celorlalte variante din ipoteza

(2) aplicând teorema medianei se obține 2a2=b2+c2 (3) și implicit

(5).Din relațiile (1),(2),(4),(5) se deduce:

2cb=ab+ac (6) care se mai poate scrie într-o formă echivalentă:

4c2b2=a2(b+c)2(7).Din egalitățile (7) și (3) se deduce:

(b-c)2(b2+c2+4bc)=0 care conduce la b=c și implicit , utilizând încă o dată relația (3) ,la a=b=c adică triunghiul ABC este echilateral(c.c.t.d)

VARIANTA 6

Din ipoteza se obține ca și în cazul variantelor anterioare

relația 2a2=b2+c2 care ne conduce la min(b,c)max(b,c)

Vom analiza două cazuri:

-cazul 1) dacă min(b,c)=b se obține b cu egalitate doar pentru b=a.Pe de altă parte din c se obține .Din relațiile anterioare se deduce că:

cu egalitate doar pentru a=b=c.(\*)

Deoarece BMGP este inscriptibil avem (\*\*)

Din relațiile (\*)și (\*\*) se deduce a=b=c deci triunghiul ABC este echilateral.

-cazul 2) dacă min(b,c)=c se obține a cu egalitate pentru a=b.Pe de altă parte din c se obține că

cu egalitate doar pentru b=c.Din relațiile anterioare se deduce cu egalitate doar pentru a=b=c.

Deoarece BMGP este inscriptibil avem:(2)

Din relațiile (1) și (2) se deduce a=b=c deci triunghiul ABC este echilateral.

PROBLEMA 2

Următoarea problemă a fost propusă la OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ-TÂRGOVIȘTE 2020 pentru elevii clasei a VIII a.Precizez că am fost evaluator la clasa a VIII a și consider că enunțul acestei probleme este interesant și vizează nu atât cunoștințele elevilor ci mai ales capacități de compunere și descompunere a unor figuri geometrice spațiale(corpuri geometrice) deci în ultimă instanță acea competență pe care am putea s-o numim ,,vederea în spațiu,,

Enunțul problemei este următorul:

,, a)Arătați că un cub se poate împărți în 125 cuburi.

b)E posibil ca un cub să poată fi împărțit în 111 cuburi nu neapărat egale?,,

REZOLVARE a)Începem rezolvarea acestui subpunct cu următoarea observație:Orice cub se poate împărți în k3 cuburi congruente unde k este un număr natural mai mare sau egal cu 2.În acest scop procedăm astfel:1)-se impart cele trei muchii care pleacă din același vârf în k segmente congruente.2)-prin punctele de diviziune se duc plane de secțiune perpendiculare pe muchia respectivă. Aceste plane de secțiune determină o descompunere a cubului dat în k3 cuburi congruente.

Dacă ne propunem să realizăm o descompunere a cubului în 125 cuburi congruente urmăm pașii 1),2) pentru k=5 deoarece 125=53 .

Deoarece enunțul problemei nu făcea referire la o descompunere în cuburi congruente un rezolvitor putea să gândească o descompunere în 125 cuburi nu neapărat congruente.

Vă propun să realizăm o descompunere a unui cub în 125 cuburi nu neapărat congruente.Fac precizarea că baremul de corectare nu viza o astfel de descompunere în 125 cuburi nu neapărat congruente.

Pasul 1: se descompune cubul dat ,considerat de muchie u,în 23 cuburi congruente de muchie u/2 .

Pasul 2:se descompune unul din cele unul din cele 8 cuburi de muchie u/2 în 43=64 cuburi congruente de muchie u/8 .

Pasul 3: sedescompune fiecare din celelalte 7 cuburi de muchie u/2 în 23 =8 cuburi congruente de muchie u/4

Pasul 4:se descompune unul din cele 56 cuburi de muchie u/4 în 33=27 cuburi congruente de muchie u/12.

OBSERVAȚIE:Înainte de a continua cu operații de compunere vom număra cuburile din descompunerea realizată în cadrul pașilor1-4:

Sunt: 64 cuburi de muchie u/8

55 cuburi de muchie u/4

27 cuburi de muchie u/12

Am obținut o descompunere cu 146 cuburi nu toate congruente.

Pasul 5: în cubul de muchie u/2 în care s-a realizat descompunerea în 64 cuburi de muchie u/8 se realizează prin compunere 3 cuburi de muchie u/4 renunțându-se deci la 24 din cele 64 cuburi.

Descompunerea finală va conține un număr de cuburi necongruente egal cu:146-24+3=125 cuburi.

Distribuția cuburilor din descompunere după muchie este următoarea:

MUCHIA NUMĂR CUBURI

u/8 64-24=40

u/4 55+3=58

u/12 27

TOTAL CUBURI: 40+58+27=125

REZOLVARE b)Conform baremului de corectare împărțirea în 111 cuburi nu neapărat congruente se face plecând de la descompunerea cubului dat în 125 cuburi congruente.

În cele ce urmează voi realiza în mai multe variante descompunerea unui cub în 111 cuburi nu toate congruente.

VARIANTA 1:

Pasul 1:Se descompune cubul ,considerat de muchie u, în 43=64 cuburi congruente de muchie u/4 .

Pasul 2:Se descompune unul din cele 64 cuburi în 33=27 cuburi congruente de muchie u/12

Pasul 3:Se descompun 3 din cele 63 cuburi de muchie u/4 nedescompuse în câte 23=8 cuburi congruente de muchie u/8

DISTRIBUȚIA CUBURILOR DIN DESCOMPUNEREA REALIZATĂ DUPĂ MUCHIE ESTE:

MUCHIA NUMĂRUL CUBURILOR

u/4 60

u/12 27

u/8 24

TOTAL CUBURI DIN DESCOMPUNERE:60+27+24=111

VARIANTA 2

Pasul 1: Se descompune cubul dat ,considerat de muchie u,în 63=216 cuburi congruente de muchie u/6

Pasul 2: Compunem din 64 cuburi de muchie u/6 un cub de muchie 4u/6 care are 3 fețe pe fețele cubului dat(eliminind astfel cele 64 cuburi).

Pasul 3:Compunem 6 cuburi de muchie 2u/6 din 48 cuburi de muchie u/6(eliminând astfel cele 48 cuburi)Se observă că acest lucru poate fi efectuat cele 6 cuburi având fețe comune atât cu cubul dat cât și cu cubul de muchie 4u/6

DISTRIBUȚIA CUBURILOR DIN DESCOMPUNERE DUPĂ MUCHIE:

MUCHIA NUMĂRUL DE CUBURI

u/6 216-64-48=104

4u/6 1

2u/6 6

TOTAL CUBURI DIN DESCOMPUNERE:104+1+6=111

VARIANTA 3

Pasul 1:Se descompune cubul dat în 63 cuburi congruente de muchie u/6

Pasul 2:Compunem din 53=125 cuburi din cele 216 un cub de muchie 5u/6 care are trei fețe pe fețele cubului dat.(Se elimină astfel cele 125 cuburi de muchie u/6)

Pasul 3:Se descompune unul din cele 91 cuburi de muchie u/6 rămase în 33 =27 cuburi congruente de muchie u/18 .

Pasul 3:Se compune un cub de muchie u/9 din 8 cuburi de muchie u/18 (eliminindu-se astfel cele 8 cuburi)

DISTRIBUȚIA CUBURILOR DIN DESCOMPUNERE DUPĂ MUCHIE ESTE:

MUCHIA NUMĂR CUBURI

u/6 216-125-1=90

u/18 27-8=19

u/9 1

5u/6 1

TOTAL CUBURI DIN DESCOMPUNEREA REALIZATĂ=90+19+1+1=111

Vă propun să găsiți și alte variante de rezolvare pentru această problemă.

PROBLEMA 3

Următoarea problemă a fost propusă la OLIMPIADA DE MATEMATICĂ-ETAPA LOCALĂ,TÂRGOVIȘTE,2020,CLASA A VI-A .

Enunțul problemei este următorul:

,,Fie mulțimea A=.Arătați că în orice submulțime a lui A cu 15 elemente,există două elemente care au suma divizibilă cu 22 ,,

OBSERVAȚIE:Deoarece un număr este divizibil cu 22 dacă și numai dacă este divizibil cu 2 și cu 11 (se ține cont că 2 și 11 sunt prime între ele) și deoarece toate elementele din mulțimea A sunt impare,deci suma oricăror două este pară,putem înlocui cerința problemei cu următoarea cerință echivalentă:,,Arătați că în orice submulțime a lui A cu 15 elemente,există două elemente care au suma divizibilă cu 11,,

O altă OBSRVAȚIE utilă este următoarea:

Rezolvarea problemei se bazează pe utilizarea Principiului lui Dirichlet:,,Dacă A este o mulțime nevidă și A1,A2,…,An este o partiție a lui A(adică ) și dacă avem n+1 elemente din A,fie acestea a1,a2,…,an+1 atunci există o submulțime Ai a partiției care să conțină cel puțin două elemente ale mulțimii

Conform baremului de corectare propus mulțimea A dată în problemă s-a partiționat astfel:A1  cu observația că suma elementelor din fiecare din submulțimile A2,A3,…,A14 fiind 110 este divizibilă cu11.

Aplicând principiul lui Dirichlet pentru mulțimea A dată,partiția propusă și o submulțime oarecare M cu 15 elemente se obține că există o submulțime a partiției care conține cel puțin două elemente ale lui M.Fiind vorba de o submulțime a partiției cu două elemente se obține că în M apar două elemente cu suma divizibilă cu 11.(c.c.t.d.)

OBSERVAȚIE:Pentru realizarea unei partiții care să conțină numărul maxim de submulțimi de două elemente cu suma divizibilă cu 11 se putea proceda astfel:

VARIANTA2 Deoarece forma generală a unui element din A este4n+1 cu n vom considera n=11k+r cu r

Dacă r=0 atunci 4n+1=11m+1

Dacă r=1 atunci 4n+1=11m+5

Dacă r=2 atunci 4n+1=11m+9

Dacă r=3 atunci 4n+1=11m+2

Dacă r=4 atunci 4n+1=11m+6

Dacă r=5 atunci 4n+1=11m+10

Dacă r=6 atunci 4n+1=11m+3

Dacă r=7 atunci 4n+1=11m+7

Dacă r=8 atunci 4n+1=11m

Dacă r=9 atunci 4n+1=11m+4

Dacă r=10 atunci 4n+1=11m+8

Se observă că resturile împărțirilor termenilor șirului 1,5,9,…,101,105 la 11 sunt sunt succesiuni de secvențe de tipul: 1,5,9,2,6,10,3,7,0,4,8.Deoarece șirul conține 27 termeni împărțind 27 la 11 obținem câtul 2 și restul 5 ceea ce înseamnă că în șirul dat există:-câte 3 numere care dau resturile 1,5,9,2,6

-câte 2 numere care dau resturile 10,3,7,0,4,8

Voi face următoarea partiție a lui A:

-3 submulțimi formate din câte două elemente care dau resturile 2 respectiv 9 la împărțirea cu 11

-3 submulțimi formate din câte două elemente care dau resturile 5 respectiv 6 la împărțirea cu 11

-2 submulțimi formate din câte două elemente care dau resturile3 respectiv 8 la împărțirea cu11

-2submulțimi formate din câte două elemente care dau resturile4 respectiv 7 la împărțirea cu11

-2submulțimi formate din câte două elemente care dau resturile 1respectiv 10 la împărțirea cu11

-1 submulțime formată din doi multiplii de 11

-1 submulțime formată din 1

Am realizat o partiție formată din 14 submulțimi dintre care 13 au câte două elemente cu suma multiplu de 11.Aplicând principiul lui Dirichlet pentru mulțimea A,partiția realizată și o submulțime oarecare a lui A cu 15 elemente se obține concluzia dorită.

În plus această variantă de rezolvare ne conduce la concluzia că 15 este cel mai mic cardinal al unei submulțimi oarecare al mulțimii A care verifică cerința problemei.Într-adevăr există submulțimi cu 14 elemente ale lui A care au proprietatea că oricare două elemente nu au suma multiplu de 11.Formăm o astfel de submulțime S din:

--cele trei elemente ale lui A care dau restul 2 la împărțirea cu 11

--cele trei elemente ale lui A care dau restul 5 la împărțirea cu11

-cele trei elemente ale lui A care dau restul 1 la împărțirea cu 11

--cele două elemente ale lui A care dau restul 3 la împărțirea cu11

--cele două elemente ale lui A care dau restul 7 la împărțire cu11

-un element multiplu de 11 dintre elementele lui A

În mod evident oricare două elemente ale lui S nu au suma multiplu de11 iar cardS=14.

Un alt avantaj al metodei îl reprezintă construirea rapidă a partiției când cardA este mare.

PROBLEMA 4

La aceeași OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ -TÂRGOVIȘTE 2020 a fost propusă la clasa a 5a următoarea problemă:

,,Fie n un număr natural.Demonstrați că dacă unul din numerele

2n-1 sau 2n+1 este prim ,atunci celălalt număr este compus.,,

OBSRVAȚIE:Voi propune câteva variante de rezolvare unele dintre ele depășind nivelul de cunoștințe al unui elev de clasa a5 a.

VARIANTA 1

--Pentru n număr par,deci pentru n =2k,cu k mai mare sau egal cu 2 se

obține 2n-1=22k-1=4k-1=(3+1)k-1=3m+1-1=3m cu m mai mare sau egal cu 5 prin urmare 2n-1 este număr compus.

--Pentru n impar deci pentru n de forma n=2k+1 cu k mai mare sau egal cu1 se obține 2n+1=22k+1+1=4k·2+1=(3+1)k·2+1=(3m+1)·2+1=6m+3=3(2m+1) cu 2m+1 mai mare sau egal cu 3 deci 2n+1 este număr compus.

Înainte de a continua trebuie făcută observația că probabil elevul de clasa a 5a ar fi trebuit să cunoască inducția matematică pentru a deduce că (3+1)k=3m+1

În baza tautologiei p→q ךq→ךp și ținând cont că pentru n mai mare sau egal cu 3 avem 2n-1 nu este număr compus este echivalent cu 2n-1 este prim(analog pentru 2n+1) obținem:

1)din n =2k 2n-1 este compus, ținând cont de precizarea anterioară se deduce: 2n-1 este prim .Pe de altă parte avem implicația: n este imparn+1 este număr compus.Din cele două implicații anterioare se deduce 2n-1 este prim 2n+1 este compus.

2)din n=2k+12n+1 este număr compus,ținând cont de precizarea anterioară se deduce: 2n+1 este prim n este par.Pe de altă parte avem implicația: n este parn-1 este număr compus.Din ultimele două implicații se deduce: 2n+1 este primn-1 este număr compus

VARIANTA 2

Această variantă este mai scurtă plecând de la observația că în baza aceleiași tautologii precizate în varianta 1 este suficient să demonstrăm doar una din implicațiile: 2n-1este prim2n+1este compus (1) ;2n+1 este prim2n-1este compus(2) deoarece ele sunt echivalente.Practic în această variantă , față de varianta 1, se renunță la una din cele două demonstrații din finalul variantei 1.

VARIANTA 3

Ținând cont de observația făcută în varianta 2 este suficient să demonstrăm doar una din cele două impicații fie aceasta:

,,2n-1este prim2n+1 este număr compus(oricare ar fi n număr natural mai mare sau egal cu 3) ,,

Voi alege o metodă indirectă de demonstrație și anume prin reducere la absurd.Presupunem că există un număr natural n ,n mai mare sau egal cu 3 astfel încât 2n-1 și 2n+1 să fie ambele prime.

--Pentru cazul n=2k ,raționând ca în varianta 1 se obține 2n-1 este divizibil cu 3 deci 2n-1 este număr compus ceea ce este în contradicție cu ipoteza.

--Pentru cazul n=2k+1,raționând ca în varianta 1 se obține 2n+1 este divizibil cu 3 deci 2n+1 este număr compus ceea ce este în contradicție cu presupunerea făcută.

Din analiza celor două cazuri se deduce că propoziția de demostrat

este adevărată.

VARIANTA 4.

Acaestă variantă se deosebește de precedentele prin modalitatea de a arăta că pentru n par avem că 2n-1 este număr compus,respectiv pentru n impar avem 2n+1 este compus.

Varianta depășește nivelul de cunoștințe al unui elev de clasa a Va deoarece presupune cunoașterea unor formule de desompunere:

1)an-bn=(a-b)(an-1+an-2b+…+abn-2+bn-1) (pentru orice număr natural nenul)

2)an+bn=(a+b)(an-1-an-2b+….-abn-2+bn-1) (pentru orice număr natural impar)

Aplicând formula 1) pentru 2n-1 și n =2k se obține

2n-1= 4k-1 =(4-1)(4k-1+4k-2+…+4+1)=3m deci număr divizibil cu 3 și mai mare decât 3 adică 2n-1 este număr compus(s-a ținut cont că n fiind mai mare sau egal cu 3 avem 3m mai mare decât 7)

Aplicând formula 2) pentru 2n+1 și n=2k+1 se obține:

2n+1=22k+1+1=(2+1)(22k-22k-1+….-2+1)=3m deci număr divizbil cu 3 și mai mare decât 3 deci 2n+1 este număr compus.

În continuare se poate raționa în mod direct sau indirect ca în celelalte variante.

COTEA MARIANA EUGENIA -FEBRUARIE 2020

TÂRGOVIȘTE