Ministerul Educației
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2022

CLASA a VIII-a

Problema 1. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Arătați că:

a) $\sqrt{\frac{2a}{b+c}} \geqslant \frac{4a}{2a+b+c}$.

b) $\frac{b}{a} \cdot \sqrt{\frac{2a}{b+c}} + \frac{c}{b} \cdot \sqrt{\frac{2b}{c+a}} + \frac{a}{c} \cdot \sqrt{\frac{2c}{a+b}} \geqslant 3$.

Problema 2. Determinați numerele naturale nenule n pentru care numerele $\frac{n}{[\sqrt{n+2}]}$ și $\frac{n+2}{[\sqrt{n}]}$ sunt naturale. (Notația $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.)

Problema 3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic și punctele M, N pe muchiile sale BC, respectiv DD', astfel încât $\frac{CM}{MB} = \frac{DN}{ND'} = k$. Notăm cu P intersecția dreptelor DM și AC, și cu Q intersecția dreptelor CN și DC'.

a) Arătați că dreapta PQ este paralelă cu planul (ABC').

b) Dacă $\sphericalangle\big(PQ, (ABC)\big) = 30^\circ$, determinați valoarea lui k pentru care paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Gazeta Matematică

Problema 4. Un cub $\mathcal{C}$ de latură $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$, este împărțit în n^3 cuburi de latură 1, cu interioarele disjuncte două câte două.

Spunem că două dintre cuburile de latură 1 sunt *olimpice*, dacă orice plan paralel cu oricare dintre fețele cubului $\mathcal{C}$ intersectează cel mult unul dintre interioarele acestor cuburi. Alegem cuburile $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$ olimpice două câte două, și notăm cu $O_1, O_2, \ldots, O_n$ centrele lor. Determinați valoarea minimă a sumei $O_1O_2 + O_2O_3 + \ldots + O_{n-1}O_n$ și stabiliți care sunt configurațiile formate din n cuburi de latură 1 pentru care se atinge acest minim.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.