Ministerul Educației
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2022

CLASA a IX-a

Problema 1. Considerăm o funcție $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că

$$\frac{x^3 + 3x^2 f(y)}{x + f(y)} + \frac{y^3 + 3y^2 f(x)}{y + f(x)} = \frac{(x+y)^3}{f(x+y)},$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $f(1) = 1$.

b) Determinați f.

Gazeta Matematică

Problema 2. a) Arătați că $2x^3 - 3x^2 + 1 \geqslant 0$, oricare ar fi $x \geqslant 0$.

b) Arătați că, dacă x, y, z sunt numere reale pozitive astfel încât

$$\frac{2}{1+x^3} + \frac{2}{1+y^3} + \frac{2}{1+z^3} = 3,$$

atunci

$$\frac{1-x}{1-x+x^2} + \frac{1-y}{1-y+y^2} + \frac{1-z}{1-z+z^2} \geqslant 0.$$

Problema 3. a) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $3^x = x + 2$.

b) Determinați perechile (x, y) de numere naturale pentru care $x + 3^y$ și $y + 3^x$ sunt numere întregi consecutive.

Problema 4. Vom spune că o mulțime de 6 puncte din plan este *partajabilă* dacă putem nota elementele acesteia cu A, B, C, D, E, F astfel încât să obținem triunghiurile ABC și DEF având același centru de greutate.

a) Dați exemplu de mulțime partajabilă.

b) Arătați că, dacă o mulțime plană are cel puțin 7 puncte, atunci ea conține o submulțime de 6 puncte care **nu este** partajabilă.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.